4h

Zeichnende Geometrie

zum

Schulunterricht

und

zum Privatstudium.

Mit

12 Figurentafeln und einem Musterblatt in Farbenton.

Von

Christoph Paulus,

Verfasser der Grundlinien der neueren ebenen Geometrie.

Stuttgart.

Verlag der J. B. Metzler'schen Buchhandlung.

1866.

Vorwort.

Die zeichnende Geometrie ist ein neues Unterrichtsfach, welches dazu bestimmt ist, in unseren Realschulen eingeführt zu werden. Nun wird sich zwar Niemand der Illusion hingeben, daß durch ein neues Fach dem vorhandenen Mißstand unserer Schulen gesteuert werden könne, welche vielmehr eher daran leiden, daß neben der Menge von Kenntnissen und Fertigkeiten, welche gelernt und geübt werden müssen, für das Nothwendigste wenig Raum übrig ist, nämlich daß die höhere geistige Anlage entwickelt und dadurch der Mensch zum Menschen gebildet werde. Diese Hauptaufgabe der Erziehung wird aber nicht durch Unterrichtsfächer gelöst, sondern es gehört vor Allem von Seiten der Lehrer und des Volkes ein Einverständniß über die Bestimmung des Menschen dazu, sowie eine in diesem Sinne eingeleitete Thätigkeit zur Verbesserung unserer gesellschaftlichen Zustände, weil diese jedenfalls den Haupteinfluß auf die Entwicklung des Menschen ausüben. Diese Sachlage kann übrigens doch auch nicht hindern, einstweilen die Unterrichtsfächer so auszubilden, daß sie das leisten, was sie leisten können, nämlich eine gründliche Kenntniß desjenigen Theiles der wirklichen Welt zu pflanzen, der einmal mit dem menschlichen Leben in Beziehung steht und daher gekannt zu werden verdient. Der Vorwurf, dem Schulunterricht durch Darbietung eines neuen Faches schädlich zu sein, wird daher die zeichnende Geometrie nicht treffen, wenn es sich zeigen wird, daß sie im Stande ist, die vorhandenen Unterrichtsfächer in einen engeren Zusammenhang zu bringen, zu ergänzen und für den späteren äußeren Beruf des Schülers nützlicher zu machen.

Seitdem durch die Anforderungen, welche von Seiten des industriellen Lebens an den Lehrer gemacht werden, das geometrische Zeichnen eine vorher unbekannte Wichtigkeit erhielt, hat auch der geometrische Unterricht eine andere Gestalt gewonnen. Er hat aufgehört blos als eine Uebung in den Formen des logischen Denkens benützt zu werden, man hat vielmehr, ohne dieses bildende Element zu vernachläßigen, angefangen die Geometrie wegen ihres Inhaltes zu lehren. Auch durfte man sich nicht blos auf den berechnenden Theil derselben beschränken, sondern die Kenntniß, Zeichnung und Construktion der Raumformen ist als der wesentlichste und wichtigste Theil dieser Wissenschaft erkannt worden. Trotz dem aber ist die Brücke zwischen der Geometrie und dem geometrischen Zeichnen noch nicht aufgefunden, und es besteht also zwischen diesen zwei Fächern eine Lücke, welche die zeichnende Geometrie auszufüllen berufen ist. Durch diese Stellung gewinnt die zeichnende Geometrie eine doppelte Wichtigkeit, indem sie eine Wirkung rückwärts auf den Unterricht in der Geometrie sowie vorwärts auf denjenigen des geometrischen Zeichnens ausübt. Sie liefert dem Lehrer einen Maßstab, welcher zeigen kann, welche Theile des ungeheuer angewachsenen geometrischen Materials für den Unterricht von jungen Leuten geeignet sind, die nicht zu Mathematikern, sondern zu Männern herangebildet werden sollen, die sich später auf dem Markt des industriellen Lebens zu bewegen haben. Andererseits gibt sie dem geometrischen Zeichnen, das immer noch keinen festen und allgemein anerkannten Inhalt gefunden hat, seinen eigentlichen Boden. Und so biete ich den Lehrern der Mathematik die zeichnende Geometrie als ein neues Unterrichtsfach, welches, ohne den Wissensstoff wesentlich zu vermehren, nicht verfehlen wird, den Unterricht in der Mathematik zugleich nutzbringend und anziehend zu machen.

Noch ist zu erwähnen, daß den Figurentafeln ein Musterblatt in Farbenton beigegeben wurde. Es kann aus demselben ersehen werden, wie das in dem Abschnitt über Dekoration Gesagte weiter ausgeführt und für die Technik verwerthet werden könne.

Inhalts-Verzeichniß.

Seite

Einleitung X

Erstes Buch. Vom Gebrauch des Lineals.

§. 1. Der Gebrauch des Lineals setzt Elemente der Symmetrie voraus 1

A. Einarige Symmetrie.

§. 2. Das einarige Vieleck 2
§. 3. Einfachste Formen der einarigen Vielecke 3
§. 4. Das einarige System 4
§. 5. Bestimmungsstücke desselben 4
§. 6. Linealkonstruktionen im einarigen System 5

B. Centrische Symmetrie.

§. 7. Das centrische Vieleck und seine einfachsten Formen 7
§. 8. Bestimmungsstücke des centrischen Systems 9
§. 9. Beziehung zwischen Mittelpunkt und Parallelismus 10
§. 10. Linealkonstruktionen im centrischen System 11

C. Zweiarige Symmetrie.

§. 11. Entwicklung des Zweiarensystems 13
§. 12. Eigenthümlichkeiten desselben 14
§. 13. Bestimmungsstücke des Zweiarensystems 15
§. 14. Linealkonstruktionen im Zweiarensystem 16

D. Regelmäßige Systeme.

§. 15. Entwicklung und Gattungen derselben 17
§. 16. Das uncentrische regelmäßige System 19
§. 17. Das centrische regelmäßige System 20
§. 18. Das tetragonische regelmäßige System 22
§. 19. Zuordnung der Elemente des regelmäßigen Systems 22

Seite
§. 20. Die Gestalten des regelmäßigen Systems 25
§. 21. Gebrauch des Lineals in den regelmäßigen Systemen 26
§. 22. Linealkonstruktionen am Trigon 27
§. 23. Linealkonstruktionen am Quadrat 28
§. 24. Linealkonstruktionen am Hexagon 30

E. Der Kreis als Inbegriff vollendeter Regelmäßigkeit.

§. 25. Regelmäßigkeit des Kreises 30
§. 26. Linealkonstruktionen der Linien im Kreis 31
§. 27. Linealkonstruktionen inbeschriebener regelmäßiger Vielecke . . . 32

Zweites Buch. Vom Gebrauch der Winkeldreiecke.

§. 28. Verwendung der Winkeldreiecke 34

A. Prüfung der Winkeldreiecke.

§. 29. Prüfung des Rechten und der spitzen Winkel der Winkeldreiecke 35

B. Parallele und ihre Anwendung.

§. 30. Winkelkonstruktion der Parallelen 36
§. 31. Theilung der Geraden durch Winkelkonstruktion 36

C. Regelmäßige Vielstrahlen.

§. 32. Der Vielstrahl 37
§. 33. Winkelkonstruktion regelmäßiger Vielstrahlen 38
§. 34. Konstruktion des regelmäßigen Achtstrahls 40

D. Regelmäßige Vielecke.

§. 35. Bestimmung derselben durch seine Axen- und Eckvielstrahlen . 40
§. 36. Winkelkonstruktion des Quadrats 41
§. 37. Winkelkonstruktion des Trigons 41
§. 38. Winkelkonstruktion des Hexagons 42
§. 39. Winkelkonstruktion des regelmäßigen Sechssterns 42
§. 40. Winkelkonstruktion des Dodekagons 43
§. 41. Winkelkonstruktion der regelmäßigen Zwölfsterne 43
§. 42. Gemischte Konstruktion des Oktagons 44

E. Division und Partition.

§. 43. Division der regelmäßigen Vielecke 45
§. 44. Division des Quadrats 46
§. 45. Division des Hexagons 47
§. 46. Partition der regelmäßigen Vielecke 48
§. 47. Partition des Quadrats 49
§. 48. Partition des Hexagons 50

Seite

F. Dekoration.

§. 49. Dekoration der regelmäßigen Vielecke 51
§. 50. Specifische Partition 52
§. 51. Beispiele abhängiger Dekoration 52
§. 52. Einbeschreibung des regelmäßigen Vielecks in ein gegebenes Vieleck 54
§. 53. Beispiele freier Dekoration 55

Drittes Buch. Vom Gebrauch des Zirkels.

§. 54. Reine und gemischte Zirkelkonstruktionen 58

A. Elementarkonstruktionen.

§. 55. Zirkelkonstruktion des Winkels 58
§. 56. Zirkelkonstruktion der Parallelen 59
§. 57. Zirkelkonstruktion der Senkrechten 61
§. 58. Zirkelkonstruktion der Kreistangenten 62
§. 59. Konstruktion des geometrischen Mittels 62

B. Kreistheilung.

§. 60. Verschiedene Methoden der Kreistheilung 64
§. 61. Dreitheilung des Halbkreises und Kreisquadranten und Sechstheilung des Vollkreises 64
§. 62. Zwei-, Vier- und Achttheilung des Kreises 65
§. 63. Halbirung eines Kreisbogens, des Halbkreises und Viertheilung des Vollkreises durch Zirkelkonstruktion 65
§. 64. Zwölftheilung des Kreises durch gemischte und reine Zirkelkonstruktion 67
§. 65. Zehntheilung des Kreises durch gemischte Konstruktion 67
§. 66. Stetige Verlängerung einer Geraden, 10-, 15- und 20-Theilung des Kreises durch reine Zirkelkonstruktion 68
§. 67. Sechzigtheilung des Kreises durch reine Zirkelkonstruktion . . . 69

C. Regelmäßige Vielecke.

§. 68. Konstruktion des Trigons, Hexagons und Dodekagons 70
§. 69. Gemischte Konstruktion des Quadrats 71
§. 70. Zirkelkonstruktion des Quadrats 72
§. 71. Konstruktion des Pentagons 72
§. 72. Konstruktion anderer regelmäßiger Vielecke 73

D. Grundgestalten der gothischen Ornamentik.

§. 73. Entwicklung derselben 74
§. 74. Der Dreipaß und Vierpaß 75
§. 75. Das Drei-, Vier-, Fünf- und Sechsblatt 76

Seite
§. 76. Die Rosetten 76
§. 77. Der Spitzbogen 77

Viertes Buch. Von den unzugänglichen Punkten.

§. 78. Ueber ihre Behandlung im Allgemeinen 79
§. 79. Aehnliche Vielecke im Vielstrahl 80
§. 80. Gebrauch der Winkeldreiecke bei unzugänglichen Punkten . . . 81
§. 81. Gebrauch des Zirkels bei unzugänglichen Punkten 84
§. 82. Die Transversale des Dreiecks und dessen umbeschriebener Dreistrahl 85
§ 83. Vielecke im Vielstrahl 87
§. 84. Gebrauch des Lineals bei unzugänglichen Punkten 90

Fünftes Buch. Ergänzungen der Kreislehre.

A. Von den Polaren.

§. 85. Harmonische Theilung im Kreis 93
§. 86. Die Polaren des Kreises 94
§. 87. Haupteigenschaft derselben 95
§. 88. Anwendung der Polaren auf Konstruktionen am Kreis 96

B. Von den Aehnlichkeitspunkten zweier Kreise.

§. 89. Innere und äußere Aehnlichkeitsstrahlen 97
§. 90. Innere und äußere Aehnlichkeitspunkte 98
§. 91. Aehnliche Systeme zweier Kreise 99

C. Von den Potenzlinien.

§. 92. Wesen der Potenzlinie 100
§. 93. Potenzlinien zweier Kreise, die sich nicht schneiden 101
§. 94. Die Lage der Potenzlinie im Allgemeinen 102
§. 95. Bestimmung ihrer Lage 103
§. 96. Beziehungen zwischen den Polaren und der Potenzlinie 104
§. 97. Konstruktion der Polaren und der Potenzlinie 105
§. 98. Konstruktion der gemeinschaftlichen Tangenten zweier Kreise . . 107

Sechstes Buch. Von der Kreisberührung.

§. 99. Uebersicht der Kreisberührungsaufgaben 109

A. Die einfacheren Fälle der Kreisberührung.

§. 100. Die einfachsten Kreisberührungsaufgaben 110
§. 101. Anwendung des geometrischen Mittels auf einige Kreisberührungsaufgaben 111

Seite

§. 102. Kreisberührungsaufgaben, welche durch Benützung der ähnlichen Systeme zweier Kreise gelöst werden 112

§. 103. Einige Anwendungen in der gothischen Ornamentik 115

B. Verwickeltere Fälle der Kreisberührung.

§. 104. Uebersicht über die Kreisberührungsaufgaben 116

§. 105. Benützung der Potenzlinie bei Kreisberührungen 117

§. 106. Der Berührungskreis zwischen Kreisen, die sich unter einander berühren 121

§. 107. Der Berührungskreis, wenn unter den gegebenen Stücken eine Gerade ist 122

§. 108. Allgemeinste Form der Kreisberührungsaufgaben 125

C. Unzugängliche Punkte der Kreisberührung.

§. 109. Behandlung derselben im Allgemeinen 127

§. 110. Konstruktion des Berührungskreises mit gegebenem Halbmesser 128

§. 111. Bestimmung des Halbmessers des Berührungskreises . . . 129

§. 112. Konstruktion des Berührungskreises zwischen Kreisen, deren Mittelpunkte in einer Richtung liegen 130

§. 113. Lage der Potenzlinie und der Polaren zweier Kreise im Allgemeinen 132

§. 114. Ihre Lage für besondere Fälle 133

§. 115. Anwendung auf die Berührungskreise des Spitzbogens . . . 134

Anhang über die Symmetrielehre 139

Einleitung.

Die zeichnende Geometrie gibt der theoretischen Geometrie ihre Vollendung und dem geometrischen Zeichnen seinen Boden, auch hat sie ein Verhältniß zur Naturgeschichte und Kunst mit ihren symmetrischen Gestalten, indem sie ihre Schlaglichter in diese Gebiete wirft.

Die theoretische Geometrie lehrt die Gesetze kennen, welchen die Raumgestalten unterworfen sind, und macht dadurch die Mittel ausfindig, mittelst welcher sie aus ihren Bestandtheilen konstruirt und berechnet werden können; allein es liegt nicht in ihrem unmittelbaren Bereich, den Reichthum der Gestalten zu erforschen, sie nach dem Grad ihrer Verwandtschaft zu ordnen und durch Auszeichnung ihrer Bestandtheile zu dekoriren. Die Geometrie bedarf also noch eines weiteren Theiles, welcher gerade diese Entwicklung der Gestalten zur Aufgabe hat. Hiedurch gewinnt sie eine unendliche Fülle von Gestalten, welche nicht nur erkannt und benannt, sondern auch gezeichnet oder konstruirt werden müssen. Aus diesem Bedürfniß erwächst nun zuerst die Lehre von der Symmetrie und Dekoration der Gestalten, welche somit als die Zuspitzung und Gipfelung des großen Baues zu betrachten ist, der in der theoretischen Geometrie seine Grundlage und Basis hat. Durch diese Vollendung tritt die Geometrie aus ihren Abstraktionen heraus und verbindet sich mit der schöpferischen Phantasie; sie kommt einerseits mit der concreten Welt der sichtbaren Schöpfung, deren Grundtypen sie nachbildet, und andererseits mit der geistigen Welt, ihrem Wesen und ihren Verhältnissen in Zusammenhang, die in den Formen der Sichtbarkeit ihre Abbilder haben. In der Entwicklung, welche die Geometrie durch die Symmetrielehre erfährt, gewinnt sie also eine ihrer schönsten Anwendungen im Bereich des Menschenlebens; denn der Mensch

wünscht in allen seinen Schöpfungen überall durch sinnige Formen und Typen das Zeichen seiner hohen geistigen Würde zu schauen, ähnlich wie der Schöpfer in den mannigfaltigen Gestalten der sichtbaren Welt seine ewige Weisheit geoffenbart hat. Aus diesen Gründen ist die Lehre von der Symmetrie und Dekoration gewiß ein wirklicher Gewinn für jeden Lehrer der Mathematik, der geistig genug ist einzusehen, daß das Wesen des Menschen nicht mit den Abstraktionen des Denkvermögens auszufüllen ist, sondern daß auch für das richtige Fühlen, Ahnen und Schauen gesorgt werden muß, und der es darum zu schätzen weiß, wenn er in seinen abstrakten Fächern ein Mittel finden kann, um auch die Saiten des höheren geistigen Lebens seiner Schüler anzuschlagen.

Dem geometrischen Zeichnen schließt die Lehre von der Symmetrie und Dekoration ein angemessenes großes Feld für seine Uebungen auf. Die symmetrischen Gestalten verschiedener Baustile, z. B. des maurischen und gothischen Stils, sind deßhalb von den Lehrern des geometrischen Zeichnens schon längst hervorgesucht und benützt worden. Allein diese Zeichnungsübungen haben doch nur einen untergeordneten Werth, wenn der Schüler nicht zugleich auch mit dem Wesen der Symmetrie und Dekoration bekannt gemacht und dadurch in den Stand gesetzt wird, solche Gestalten zu beurtheilen und selbstständig zu entwerfen. Es wird also von dieser Seite aus die Lehre von der Symmetrie und Dekoration ein wichtiger und sogar unentbehrlicher Bestandtheil des geometrischen Zeichnens bleiben. So lange das geometrische Zeichnen diesen ihm naturgemäßen Inhalt entbehrt, wird es stets ein Appendix der Geometrie bleiben, welcher verdammt ist, die schon bekannten geometrischen Konstruktionen in vermehrter Auflage wiederzukauen; oder, wenn man das nicht will, so wird man etwa zu den Entdeckungen der neueren Geometrie greifen und die künstlichen, häufig auch gefälligen Figuren zeichnen, welche die Collineation ebener Systeme, namentlich der Kegelschnitte, an die Hand gibt. Aber auch im letzteren Fall wird der Schüler wenig geistigen Nutzen haben, weil das gewonnene Resultat, das er nach den Anweisungen seines Lehrers ohne Verständniß entwirft, wie ein Zauberbild hervorwächst, das er wohl bewundern aber nicht begreifen kann. Dem gegenüber bieten die symmetrischen Systeme ein unerschöpfliches Feld von anziehenden Gestalten, die er vollkommen verstehen und bemeistern kann und deren Kenntniß einen bleibenden Werth für sein späteres Leben habt.

Auch die Thätigkeit des Zeichnens selbst, nämlich die Kunstfertigkeit

des Zeichners, findet in den symmetrischen Gestalten und in ihrer Dekoration ein reiches Feld der Uebung. Es kann sich hiebei nicht handeln um die Bekanntschaft mit all den geometrischen Konstruktionen, die ihrer Zahl nach unendlich und ihrer Qualität nach häufig schwierig und nur mittelst tiefer geometrischer Kenntnisse ausführbar sind, sondern was dem geometrischen Zeichner, der für's Leben gebildet werden soll, nöthig ist, reduzirt sich auf eine fertige Handhabung seiner Instrumente, ähnlich wie ein Handwerker für geschickt gilt, wenn er mit seinen Instrumenten gewandt umzugehen weiß. Der Zeichner muß wissen, welches von seinen Instrumenten zur Erreichung seines besonderen Zweckes den größten Vortheil darbietet, er muß also die Leistung eines jeden einzelnen Instrumentes kennen, sodann muß er auf jedes einzelne Instrument so eingeübt sein, daß er stets die Genauigkeit mit demselben zu erzielen weiß, welche es gestattet. Aus diesem Grunde ist es nothwendig, die Uebungen mit dem Lineal, mit den Winkeldreiecken und mit dem Zirkel einzeln vorzunehmen. Hiebei handelt es sich natürlich nicht um eine pedantische Methodik, welche bei Einübung eines Instruments jeden Gebrauch der anderen Instrumente verbietet, da ja der Schüler durch den geometrischen Unterricht im Allgemeinen mit allen Instrumenten bekannt ist; es handelt sich vielmehr darum, daß er jetzt auf jedes dieser Instrumente technisch eingeübt werden soll, daß er die Tragweite eines jeden Instrumentes kennen lerne und es in der Handhabung desselben zur größten Fertigkeit bringe, so daß er in allen Fällen bei der größten Schnelligkeit die größte Nettigkeit und Genauigkeit im Zeichnen zu erzielen wisse. Nun haben sich bekanntlich große Mathematiker mit der Aufgabe beschäftigt, die Tragweite des Lineals und des Zirkels zu ermitteln. Die Arbeiten Mascheroni's für den Zirkel und diejenigen Steiner's für das Lineal haben in der gelehrten Welt eine Berühmtheit erlangt, ohne bis jetzt eine Anwendung gefunden zu haben. Durch die zeichnende Geometrie werden diese Arbeiten nutzbar gemacht, indem gerade die praktischen Ergebnisse jener Forschungen am besten die Kunstfertigkeit des geometrischen Zeichners entwickeln können. Neben der Benützung dieser Forschungen mußte auch noch den Winkeldreiecken eine besondere Beachtung gewidmet werden. Bis jetzt hat man ihren Gebrauch fast gänzlich auf das Ziehen von Parallelen und Senkrechten beschränkt, während die spitzen Winkel dieser Instrumente keine besondere Verwendung gefunden haben. Allein eben diese Winkel von 30°, 45° und 60°, welche längst mit den Winkeldreiecken verbunden sind, schließen

bereits Elemente der Symmetrie in sich ein, welche dem Zeichner werthvolle Dienste leisten und ihn in den Stand setzen, die am häufigsten vorkommenden Gestalten mit Vermeidung der Zirkelstiche auf eine sehr leichte Weise zu zeichnen.

Die Lehre von der Symmetrie und Dekoration einerseits und die Kunstfertigkeit in Handhabung der geometrischen Instrumente andererseits sind die zwei Bestandtheile der zeichnenden Geometrie.

So fremdartig diese zwei Bestandtheile auf den ersten Blick auch erscheinen mögen, so haben sie doch die Fähigkeit sich zu einem harmonischen Ganzen zusammenzufügen und eine von einem Geiste getragene Einheit zu bilden.

Die Anwendung des Lineals ist nämlich mit Ausnahme der harmonischen Theilung lediglich auf die symmetrischen Gestalten beschränkt. Innerhalb dieses Gebiets hat aber dieses Instrument eine sehr ausgedehnte Anwendung, indem es allein schon ausreicht den ganzen Inhalt der Beziehungen, welche eine symmetrische Gestalt in sich birgt, aufzuschließen. Dieß findet selbst in einem solchen Grade statt, daß man sagen kann, daß Derjenige, welcher diesen Gebrauch des Lineals nicht kennt, eine gründliche Einsicht in das Wesen der Symmetrie nicht wohl haben kann. Die Anwendung des Lineals im Bereich der symmetrischen Gestalten ist also ein wesentlicher Theil der Symmetrielehre selbst.

Wenn nun aber die Symmetrie sich bis zu den höheren Graden ihrer Ausbildung entwickelt, so gewinnt der regelmäßige Vielstrahl eine hervorragende Bedeutung, indem jedes regelmäßige System durch einen regelmäßigen Vielstrahl beherrscht wird und alle Gestalten desselben gezeichnet werden können, sobald man den herrschenden Vielstrahl des Systems zeichnen kann. Gestattet daher ein Instrument die Zeichnung eines regelmäßigen Vielstrahls, so reicht dasselbe auch aus um alle Gestalten des Systems zu zeichnen. Einen solchen Dienst leisten die Winkeldreiecke. Mittelst ihrer kann man sehr leicht und ohne Hilfe eines anderen Instruments den regelmäßigen Zweistrahl, Dreistrahl, Vierstrahl, Sechsstrahl und Zwölfstrahl zeichnen, vollkommen genau, wenn das Instrument genau ist. Die zwei Winkeldreiecke haben also ihre Bedeutung darin, daß sie das Mittel bieten alle Gestalten des rhombischen, trigonalen, tetragonalen, heragonalen und dodekagonalen Systems zu zeichnen. Die

Winkeldreiecke haben also für die regelmäßigen Gestalten, wenigstens für eine Zahl derselben, dieselbe Bedeutung, wie das Lineal für die einfach symmetrischen Gestalten. Auch kann man sagen, daß die regelmäßigen Gestalten nur gründlich verstanden werden, wenn man ihr Verhältniß zu den regelmäßigen Vielstrahlen begriffen hat. Die Winkeldreiecke und ihr gewandter Gebrauch haben also trotz ihrer beschränkten Anwendbarkeit doch darin ihre große Bedeutung, daß sie eine gründliche Einsicht in die regelmäßigen Gestalten fördern und eine Gewandtheit im Zeichnen derselben herbeiführen, die besonders bei der Dekoration ihre Anwendung findet.

Wenn übrigens die Winkeldreiecke zur Konstruktion der gewöhnlichsten regelmäßigen Vielecke dienen können und hiezu häufig das einfachste Mittel an die Hand geben, so ist doch ihre Anwendbarkeit auf eine kleinere Zahl von regelmäßigen Systemen beschränkt. Dagegen ist der Zirkel dasjenige Instrument, welches allein zur Konstruktion aller regelmäßigen Systeme und ihrer Gestalten, wenigstens nach ihren Eckpunkten, ausreicht. Beim Gebrauch des Zirkels tritt daher das Verhältniß des Kreises zu den regelmäßigen Systemen, als die andere Seite der Regelmäßigkeit, in den Vordergrund, und mit ebensoviel Recht als bei den Winkeldreiecken kann man hier sagen, daß die Regelmäßigkeit nicht gründlich verstanden werden kann, wenn ihr Verhältniß zum Kreis nicht begriffen ist.

Es ist also augenscheinlich, wie die Entwicklung der symmetrischen Gestalten mit dem Gebrauch der verschiedenen geometrischen Instrumente Hand in Hand geht, indem die Konstruktion dieser Gestalten nach dem Maß ihrer entwickelteren Bildung auch den Gebrauch der entwickelteren Instrumente voraussetzt. Es verbindet sich also die Symmetrielehre naturgemäß mit der Einübung der geometrischen Instrumente nach dem Grad ihrer Entwicklung und gestaltet sich dadurch zu einem harmonischen Ganzen, das den Namen der zeichnenden Geometrie als eines in sich geschlossenen einheitlichen Unterrichtsfaches verdient. Allerdings ist der Gebrauch des Zirkels nicht auf die Konstruktion der regelmäßigen Gestalten beschränkt, sondern er ist die letzte Zuflucht bei allen, auch den schwierigsten Konstruktionen, er ist das Hauptinstrument des gelehrten Mathematikers ebenso sehr wie des geometrischen Zeichners. Für den letzteren beruht jedoch der Werth des Zirkels in der Beziehung des Kreises zu den regelmäßigen Systemen, für ihn ist der Zirkel das Instrument zur Theilung des Kreises und der Kreisbögen, zur Konstruktion der regelmäßigen

Vielecke und der Gestalten der gothischen Ornamentik, sowie zu den Anwendungen, welche diese Konstruktionen im Bereich des industriellen Lebens gefunden haben.

Der nach den geometrischen Instrumenten geordnete Stufengang der zeichnenden Geometrie rechtfertigt sich auch im Hinblick auf die Eigenthümlichkeit der Instrumente. Bei den Uebungen mit dem Lineal wird es sich bald herausstellen, daß mit der größten Sorgfalt zu Wege gegangen werden muß, wenn man mit diesem Instrument genaue Resultate erzielen will. Diese Einsicht ist für den Zeichner von großem Werth, weil er dadurch genöthigt wird, seine Aufmerksamkeit gerade auf das zu lenken, was beim Gebrauch des Lineals immer nothwendig ist, nämlich genau an die Punkte anzulegen, durch welche die Gerade gehen soll, die Punkte deßhalb, wenn er sie entwirft, so fein als möglich zu bekommen, dadurch daß er sich gewöhnt nur mit gut gespitzten Bleistiften scharfe und möglichst feine Linien zu ziehen. Diese Regeln sind bald gesagt, aber sie werden vom Schüler wenig gewürdigt, wenn er nicht durch Erfahrung von der Wichtigkeit derselben einen tiefen Eindruck bekommen hat. Die Linealkonstruktionen des ersten Buchs werden ihm diese Erfahrung reichlich bieten, indem er nur ganz mangelhafte Zeichnungen bekommt, wenn er nicht die ganze Vorsicht gebraucht, welche das Zeichnen mit dem Lineal in allen Fällen verlangt. Es handelt sich also bei den Uebungen mit dem Lineal nicht um die beste Methode zur Zeichnung einer vorgeschriebenen Gestalt, sondern um die Uebung, welche beim Zeichnen mit dem Lineal bei jeder Methode gleichwohl den Ausschlag gibt. Mit dem Lineal werden die Zeichnungsübungen begonnen, nicht nur weil die Symmetrie mit der geraden Linie in einem besonderen Zusammenhang steht, sondern auch weil das Zeichnen mit dem Lineal am meisten geeignet ist, die Aufmerksamkeit des Schülers gerade auf das zu lenken, was die Fertigkeit und Genauigkeit des Zeichners am meisten fördert. Die Arbeit mit den Winkeldreiecken verlangt einerseits die gleiche Vorsicht wie das Lineal. Denn das Winkeldreieck ist wesentlich ein Lineal nur mit einer weiteren Abänderung versehen, welche gestattet, demselben eine bestimmte Stellung zu geben. Beim Zirkel endlich kommt zu der Achtsamkeit, daß die Kreislinie durch einen gegebenen Punkt gehe, noch die andere hinzu, daß dieselbe aus einem gegebenen Punkt beschrieben werde. Die Aufmerksamkeit, welche beim Winkeldreieck auf die Stellung des Anlagelineals gerichtet sein muß, verwandelt sich beim Zirkel in die Sorgfalt, welche beim Einsetzen des einen

Zirkelfußes in den Mittelpunkt des Kreises zu beobachten ist. Diese besonderen Rücksichten abgerechnet, welche die entwickelteren Instrumente noch überdieß erheischen, verlangen alle drei Instrumente die gleiche Sorgfalt im Ziehen scharfer feiner Linien, so daß sie genau durch gegebene oder im Verlauf der Konstruktion sich ergebende Punkte gehen. Die Kunstfertigkeit im gewandten Gebrauch des Lineals ist also eine Eigenschaft, welche unmittelbar auch auf den gewandten Gebrauch der anderen Instrumente vorbereitet.

Nachdem nun bisher die Aufgabe und der Stufengang der zeichnenden Geometrie bestimmt worden ist, so wäre noch der Umfang derselben, nämlich die Grenzen zwischen welchen sie sich zu halten hat, festzustellen. In dieser Hinsicht ist nicht zu verkennen, daß von einem höheren Standpunkt aus betrachtet die zeichnende Geometrie nicht auf den Gebrauch des Lineals, der Winkeldreiecke und des Zirkels beschränkt werden kann, es gibt noch viele symmetrische Gestalten höherer Ordnung, wie z. B. die Kegelschnitte, ihre Evoluten und Envolventen, die Cycloiden 2c., welche im Bereich der Industrie, Kunst und Natur getroffen werden und mit keinem der genannten Instrumente gezogen, sondern nach vorausgegangener Bestimmung einiger Punkte und Tangenten zuletzt aus freier Hand gezeichnet werden. Allein man hat mit Recht das Studium dieser Formen von dem Unterricht der Realschulen fern gehalten und in die höheren Schulen, welche für die Ausbildung der technischen Fachmänner eingerichtet sind, verwiesen. Um so mehr kann und muß die zeichnende Geometrie, so fern sie noch zu den allgemeinen Bildungsfächern gezählt werden soll, auf die geradlinigen und kreisförmigen Gestalten beschränkt werden. Allein auch innerhalb dieser Grenzen hat sie noch ein weites Feld, das Bedenken erregen kann, ob es das Maß unserer Realschulen nicht übersteigt, namentlich seitdem dasselbe in den letzten Decenien durch die Entdeckungen der neueren Geometrie mit einer Menge von neuen Lehrsätzen bereichert wurde, welche gerade in dem Gebiet des geometrischen Zeichnens eine ausgedehnte Anwendung gefunden haben. Nachdem es sich herausgestellt hat, daß viele dieser Lehrsätze ein unentbehrliches Hilfsmittel für das geometrische Zeichnen sind, so kann nur noch die Frage sein, ob neben jenen Sätzen auch die Methode der neueren Geometrie in den Unterricht unserer Realschulen aufgenommen werden soll, oder ob man sich beschränken soll, die wichtigsten Sätze, mit elementarer Begründung verständlich gemacht, in den geometrischen Unterricht aufzunehmen. Wenn auch nicht abzusehen ist,

warum die mathematischen Klassen der polytechnischen Anstalten sich gegen die Methode der neueren Geometrie verschließen sollten, so kann doch vom Standpunkt der Realschulen hiegegen mit Recht eingewendet werden, daß diese Methode doch erst ihre hauptsächlichste Anwendung bei den Linien zweiter Ordnung finde, die nicht mehr in den Bereich der Realschulen gehören, und daß sie deßhalb für den größten Theil der Schüler, welche ihre mathematische Ausbildung nicht höher treiben wollen, ein Ballast wäre, der nur ihren Wissenskram vermehren könnte. Wenn also die Realschule die Methode der neueren Geometrie, als über ihre Aufgabe hinaus gehend, nicht in ihren Unterricht aufnehmen kann, so sind doch viele Entdeckungen derselben wegen ihrer Anwendung im geometrischen Zeichnen eine unentbehrliche Sache. Dieß ist auch der Standpunkt, der jetzt von den Lehrern der Realschulen ziemlich allgemein eingenommen wird, und die neueren Schulbücher der Geometrie wetteifern in dem Streben, die wichtigsten Resultate der neueren Geometrie auf elementare Weise zu entwickeln. Die zeichnende Geometrie hat sich diesem Streben angeschlossen, jedoch mit der Rücksicht, nur so viel von diesen Resultaten aufzunehmen, als zur Lösung ihrer Aufgabe unumgänglich nothwendig war. Denn wer sollte, eingedenk der Thatsache, daß die Vielwisserei für den eigentlichen Zweck der Erziehung nur schädlich ist, den Eifer der Lehrer nicht billigen, welcher bestrebt ist, das Material des Wissens auf das Maß des Nothwendigen zu reduziren? Diese Rücksicht hatte für die zeichnende Geometrie die Folge, daß von den Entdeckungen der neueren Geometrie Einiges aufgenommen werden mußte, das sonst in den Schulbüchern der Geometrie nicht getroffen wird, daß aber dafür Anderes, was dort getroffen wird, weggelassen wurde. Zum ersteren gehört die perspektivische Lage collineärer ebener Systeme, welche in den Sätzen §. 83 behandelt sind; allein dieselben sind auf eine elementare Form gebracht worden, wo weder der Begriff der Collineation noch derjenige der perspektivischen Lage benützt ist. Weggelassen wurden in der Kreislehre die Begriffe des Potenzcentrums, des Potenzkreises und der Aehnlichkeitsaxen und die damit zusammenhängenden Sätze. Diese Sätze haben allerdings eine Anwendung in der Kreisberührung, weil die gemeinschaftlichen Sehnen zwischen dem Potenzkreis und den gegebenen Kreisen mit den Tangenten der Berührungspunkte in Punkten der Aehnlichkeitsaxen convergiren. Allein für den praktischen Zeichner ist die Benützung der Aehnlichkeitsaxen überhaupt nicht geeignet, weil die Axen sehr häufig in große Entfernung hinausrücken und unzugängliche Punkte

erzeugen, die nur durch weitläufige Konstruktionen noch benützt werden können. Von den neueren Entdeckungen im Bereich der Kreislehre wurden dagegen nur die Sätze von den Polaren, den Aehnlichkeitspunkten und den Potenzlinien aufgenommen, welche nothwendig sind, um die Aufgabe der Kreisberührung auf eine erschöpfende und praktische Weise zu lösen. Diese Entdeckungen wurden aber sodann mit der Vollständigkeit behandelt, daß nicht nur eine stückweise Erkenntniß der hieher gehörigen Beziehungen, sondern eine solche Klarheit der Anschauung gewonnen werden kann, welche den Schüler in den Stand setzt, sich frei in diesem Gebiete zu bewegen. Um dieser Anforderung zu genügen, war es allerdings nothwendig, einige Sätze einzuschalten, die sonst nicht beachtet werden, und die in der Doppelform §. 95 und 96 ausgesprochen sind. Ich nahm um so weniger Anstand diese Sätze aufzunehmen, weil dieselben in einem anderen Fall zu einer einfachen Lösung führen, die für den Zeichner eine besondere Wichtigkeit hat. Dieß ist der Fall des Berührungskreises, der die Schwierigkeit zu überwinden hat, die entsteht, wenn die Convergenzpunkte der Polaren der Aehnlichkeitspunkte und der Potenzlinien der drei gegebenen Kreise unzugänglich werden, und welche durch den Satz §. 111 ihre Lösung findet. Unbegreiflicher Weise ist dieser Fall bis jetzt ganz übersehen worden, obgleich er in der gothischen Ornamentik die ausgedehnteste Anwendung hat. H. Prof. Reusch hat denselben in seinem Werk über den Spitzbogen auf analytische Weise durch mehrere Formeln, von denen jede wieder eine besondere Abart behandelt, zu bewältigen gesucht. Die zeichnende Geometrie hat in der wichtigen Aufgabe der Kreisberührung einen Weg eingeschlagen, der in allen besonderen Fällen gleich sehr anwendbar ist und den Vortheil der praktischen Ausführbarkeit für sich hat. Weil die Potenzlinien in den meisten Fällen der gothischen Ornamentik, wo gewöhnlich Schnittkreise und Berührungskreise gegeben sind, in Form der gemeinschaftlichen Sehne oder Tangente unmittelbar gezogen werden können, jedenfalls aber durch einen gemeinschaftlichen Schnitthilfskreis leicht gezeichnet werden, so wurde die Konstruktion der Polaren ohne Hilfe des Aehnlichkeitspunkes durch Benützung der Potenzlinie bewerkstelligt. Auf diese Weise nahm die Aufgabe des Berührungskreises eine Form an, von der ich keinen Anstand nehme, bis das Gegentheil bewiesen ist, zu behaupten, daß sie in Hinsicht der Klarheit und Abrundung der Anschauung, sowie in Hinsicht der zeichnerischen Vortheile vor allen seither benützten Auflösungen den Vorzug hat. Es ist bei dieser Auflösung die kleinste Anzahl von

Hilfslinien erforderlich, so daß die Nettigkeit der Zeichnung am meisten gefördert wird. Sind die Potenzlinien gezogen, so erfordert die Bestimmung der Polaren nur noch drei Hilfslinien; allein es ist nicht nöthig, dieselben ganz auszuziehen, es genügen drei kurze Striche, einer durch die Potenzlinie und zwei andere sich kreuzende in einem der betreffenden Kreise. Bei einiger Uebung wird der Schüler mit den geraden Strichkreuzen bald ebenso umgehen, wie er bei den Zirkelkonstruktionen die Bogenkreuze schon längst mit Vortheil benützt; und es werden mit Benützung weniger solcher Strichkreuze der Berührungskreis, ohne die Ueberladung des Zeichnungsfeldes mit Hilfslinien, zum Nutzen der Sauberkeit ans Tageslicht treten.

Nach allen diesen Ueberlegungen gestaltete sich der Plan der zeichnenden Geometrie des vorliegenden Werkes, und es ergaben sich sechs Bücher, von welchen die drei ersten der Lehre von der Symmetrie und Dekoration und der technischen Einübung der geometrischen Instrumente gewidmet wurden. Nun enthalten diese drei ersten Bücher nur solche Konstruktionen, welche mit den gewöhnlichsten geometrischen Kenntnissen ausgeführt werden können; dieselben enthalten also das, was in den unteren mathematischen Klassen getrieben werden kann. Die drei folgenden Bücher enthalten sodann vorzugsweise dasjenige, was höhere geometrische Kenntnisse voraussetzt, nämlich diejenigen Konstruktionen, welche von den Entdeckungen der neueren Geometrie Gebrauch machen. Das vierte Buch holt dasjenige nach, was für den Gebrauch des Lineals und der Winkeldreiecke noch übrig ist, und die Kenntniß der perspektivischen Lage ähnlicher und collineärer Systeme voraussetzt. Das fünfte und sechste Buch behandelt die Kreisberührung; es wurden übrigens hier des Zusammenhangs halber sowohl diejenigen Fälle behandelt, welche mit elementaren Kenntnissen gelöst werden können, als auch diejenigen, welche von den Entdeckungen der neueren Geometrie Gebrauch machen, doch wurden die elementaren Konstruktionen der Kreisberührung in dem ersten Abschnitt des sechsten Buches zusammengestellt, damit der Lehrer, welcher dieselben früher vorzunehmen wünscht, das Material schon geordnet zur Hand habe.

Weil der Menschengeist unbefriedigt ist, bis er einer Sache auf den Grund sieht, so mag zum Schluß noch das Verhältniß der zeichnenden Geometrie zum geometrischen Zeichnen etwas näher, als es schon geschehen ist, angegeben werden. Nach meiner Anschauung ist es die Aufgabe der zeichnenden Geometrie, die Grundformen der einfacheren und komplizirteren

symmetrischen Gestalten nach den Graden ihrer Entwicklung und mit den passenden Formen dekorirt zu erläutern und zu entwerfen, während das geometrische Zeichnen die Aufgabe hat, die Anwendungen dieser Grundformen im Leben zeichnerisch darzustellen. In diesen mathematischen Grundformen erscheint die symmetrische Gestalt als eine Vereinigung von Linien ohne merkliche Dicke, und nur so weit markirt, daß die Glieder der Gestalt augenfällig werden; in ihrer Anwendung im Leben aber erscheint die mathematische Grundform entweder als ein Gitterwerk aus runden oder kantigen Eisenstäben, oder als eine erhabene Steinhauerarbeit, Holzschnitzlerei, oder sie kommt an einem Fenster zum Vorschein wo die Felder der Gestalt zwischen Steinhauerarbeit oder zwischen metallenem Gitterwerk in dem Glanze bunt gefärbter Gläser prangen; auch zeigen sie sich im Bereich der Maschinenwelt in Form von Kugeln, Scheiben, Cylindern, prismatischen und kegelförmigen Säulen, gezahnten Rädern rc. Die Zeichnung dieser gewöhnlich mit Tusch und Colorit ausgeführten geometrischen Grundformen in ihren Anwendungen im Leben ist die Aufgabe des geometrischen Zeichnens. Zeichnende Geometrie und geometrisches Zeichnen sind daher zwei so sehr in einander greifende Fächer, daß sie keine durchgeführte Trennung gestatten und jedenfalls von einem und demselben Lehrer gelehrt werden müssen.

Erstes Buch.

Vom Gebrauch des Lineals.

§. 1.

Mit dem Lineal allein kann eine symmetrische oder regelmäßige Gestalt nicht gezeichnet werden. Allein, wenn eine symmetrische Gestalt gegeben ist, so können schon mit dem Lineal andere durch die Symmetrie der gegebenen Gestalt bestimmte Punkte, Linien und Theilgestalten eingezeichnet werden. Offenbar gehört es aber zur Fertigkeit eines Zeichners, diese in der Symmetrie der Gestalt liegenden Hilfsmittel zu kennen.

Professor Steiner in Berlin, der Mitbegründer der neueren Geometrie, hat zuerst hierauf hingewiesen in einem besonderen Schriftchen, betitelt „die geometrischen Konstruktionen ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises, als Lehrgegenstand auf höheren Unterrichtsanstalten und zur praktischen Benützung.“ Derselbe faßt seine Aufgabe vom rein theoretischen Standpunkt auf und zeigt, daß, wenn zwei Parallellinien oder eine Gerade mit ihrer Mitte gegeben ist, manche andere Bestimmungen, und, wenn ein Kreis gegeben ist, sogar alle gewünschten Konstruktionen mit blosem Lineal ausgeführt werden können. In dieser allgemeinen Fassung hat die Sache neben ihrem wissenschaftlichen Interesse doch nur wenig praktischen Werth. Wir fassen sie daher in einem bestimmteren Sinn auf, wodurch sie nicht nur öfters wirklich praktische Bedeutung gewinnt, sondern auch geeignet ist, über das Wesen und die Eigenthümlichkeit der symmetrischen und regelmäßigen Figuren eine gründliche Einsicht zu verschaffen.

Es ist ohnehin nicht zu verkennen, daß die Geometer der Erforschung der Symmetrie seither zu wenig Aufmerksamkeit geschenkt haben, obgleich Kunst und Natur hiezu Aufforderung genug enthalten. Jedenfalls ist

aber für den geometrischen Zeichner eine Einsicht in das Wesen der Symmetrie unerläßlich. Es wird daher hinreichend gerechtfertigt erscheinen, wenn in diesem dem Gebrauch des Lineals gewidmeten Buche zugleich eine Darlegung der Symmetriegesetze versucht wird. Es ist dieß ein sehr weites und immer noch wenig durchforschtes Gebiet, von dem natürlich hier nur die ersten Elemente vorkommen können. Die Hauptformen der Symmetrie sind die einaxigen, centrischen, zweiaxigen und regelmäßigen Gestalten, welche in den folgenden Paragraphen nach ihrer Beziehung zur geraden Linie und zum Lineal betrachtet werden sollen.

A. Einaxige Symmetrie.

§. 2.

Ein Vieleck heißt **einaxig**, wenn es durch eine Gerade in zwei congruente Hälften zerlegt werden kann, deren Theile in entgegengesetztem Drehungssinne* auf einander folgen. Diese das Vieleck hälftende Gerade heißt Axe der Symmetrie, die in der Congruenz sich entsprechenden Theile: Punkte, Linien, Winkel, Theilgestalten heißen einander symmetrisch zugeordnet, die Geraden, welche zwei einander zugeordnete Punkte, verbinden heißen Zuordnungsstrahlen. Es folgt hieraus, daß in jeder einaxigen Figur zwei einander zugeordnete Strecken, Winkel oder sonst beliebige Theilgestalten einander gleich sind.

Wenn also Vieleck ABCDE ≅ AHGFE (Fig. 1) und die Seiten und Ecken des einen Vielecks in entgegengesetztem Drehungssinn mit denen des anderen Vielecks aufeinander folgen, so ist das Vieleck ABCDEFGH einaxig, AE ist seine Symmetrieaxe, die Geraden BH, CG, DF sind Zuordnungsstrahlen.

Anm. Noch richtiger aufgefaßt kann man auch sagen das Vieleck ABCDEFGH sei dem Vieleck AHGFEDCB congruent und habe mit demselben die Gerade AE samt allen ihren Punkten gemeinschaftlich. In der Sprache der neueren Geometrie, würde man also sagen, zwei ebene congruente Systeme so vereinigt, daß sie mit zwei homologen Richtungen und mit allen homologen Punkten dieser Richtungen coincidiren, bilden ein involutorisches System, welches einarig heißt.

---

* Bei jeder in sich geschlossenen Figur können zweierlei Drehungssinne unterschieden werden, von welchen der eine demjenigen eines Uhrenzeigers entspricht, während der andere demjenigen des Uhrenzeigers gerade entgegengesetzt ist.

§. 3.

Die einfachsten einaxigen Vielecke sind folgende:

1) Das gleichschenklige Dreieck. (Fig. 2.)

Das gleichschenklige Dreieck ABC wird nämlich durch seine Höhe CD in zwei congruente Theildreiecke ADC und BDC von entgegengesetztem Sinn der Aufeinanderfolge seiner Theile zerlegt, es ist also für CD als Symmetrieaxe einaxig; die Ecken A und B, die Schenkel AC und BC, die Winkel A und B sowie die Winkel ACD und BCD an der Spitze sind einander zugeordnet und als solche gleich.

2) Das Deltoid oder einaxige Vierseit. (Fig. 3).

Dasselbe, welches zwei Paare gleicher Seiten hat, AB und AD, BC und CD, wird nämlich durch die Längendiagonale AC in zwei congruente Dreiecke ABC und ADC von entgegengesetzter Aufeinanderfolge der Theile zerlegt, es ist also einaxig; die Längendiagonale AC ist seine Symmetrieaxe, die Querdiagonale BD ist ein Zuordnungsstrahl, welcher die zugeordneten Punkte B und D verbindet, und seine vier Seiten AB und AD, BC und CD sind paarweise einander zugeordnet.

Es ist ein bekannter Satz der Elementargeometrie, daß die Querdiagonale BD von der Längendiagonale AC senkrecht halbirt wird.

3) Das symmetrische Trapez oder einaxige Viereck. (Fig. 4.)

Das Trapez ABCD mit den parallelen Seiten AB und CD heißt bekanntlich symmetrisch, wenn dessen convergente Seiten AD und BC einander gleich sind; dasselbe hat, wie bekannt, an den parallelen Seiten AB und CD bei A und B, sowie bei C und D gleiche Winkel, und überdieß auch gleiche Diagonalen AC und BD. Verlängert man die convergenten Seiten bis zu ihrem Convergenzpunkt E, so entstehen zwei gleichschenklige Dreiecke ABE und CDE; die Senkrechte EGH vereinigt die Höhen dieser Dreiecke und halbirt die parallelen Seiten AB und DC. Daraus folgt leicht daß Viereck AHGD ≅ BHGC. Das Trapez ABCD ist also einaxig, die Gerade GH welche die Mitte seiner parallelen Seiten verbindet ist seine Symmetrieaxe, die Ecken C und D, A und B sind paarweise einander zugeordnet und durch die Zuordnungsstrahlen AB und CD verbunden.

Es ist noch wichtig zu bemerken, daß die Diagonalen AC und BD

in einem Punkt F der Axe GH convergiren. Da nämlich die Dreiecke ABC und ABD congruent, also die Winkel ABD und BAC gleich sind, so bilden sie mit AB ein gleichschenkliges Dreieck ABF, dessen Spitze F auf der senkrechten Halbirungslinie von AB, d. h. auf der Axe GH liegt.

§. 4.

Aus den einfachen Vielecken lassen sich die Eigenschaften der zusammengesetzteren leicht abnehmen, dieselben sind:

1) **Alle Zuordnungsstrahlen eines einaxigen Vielecks sind einander parallel, stehen auf der Symmetrieaxe senkrecht und werden durch dieselbe halbirt.**

2) **Wenn in einem einaxigen System zwei Punkte einer Richtung zweien Punkten einer anderen Richtung zugeordnet sind, so convergiren diese Richtungen in einem Punkte der Symmetrieaxe und bilden einen Winkel der von der Symmetrieaxe halbirt wird. (Fig. 5.)**

Ist z. B. das Vieleck ABCDEFGHIK für die Axe AF symmetrisch und ist das Eck C dem Eck I zugeordnet, so sind auch die Strecken AC und AI so wie FC und FI einander zugeordnet, als solche einander gleich und bilden ein Deltoid ACFI. Die Querdiagonale IC desselben wird also durch die Längendiagonale AF senkrecht halbirt (§. 3, 2). Aus dem gleichen Grund werden auch die Zuordnungsstrahlen HD, GE, BK von AF senkrecht halbirt und sind also unter einander parallel. Zwei solche Zuordnungsstrahlen, z. B. CI und EG, bilden mit den Verbindungslinien CE und IG, welche als zugeordnet einander gleich sind, ein symmetrisches Trapez CEGI. Daraus folgt (§. 3, 3) daß CE und IG, sowie CG und EI in Punkten N und M der Symmetrieaxe AF convergiren und daß $\angle AMC = \angle AMI$, $\angle ANC = \angle ANI$.

§. 5.

Jedes einaxige System ist durch seine Symmetrieaxe, also auch durch zwei einander zugeordnete Punkte, so wie durch zwei einander zugeordnete Richtungen vollkommen bestimmt. Denn die Symmetrieaxe ist die senkrechte Halbirungslinie der durch die zugeordneten Punkte begrenzten Strecke, sowie die Halbirungslinie des durch die zwei zugeordneten Richtungen gebildeten Winkels. Um z. B. zu einem Punkt A (Fig. 7) den zugeord-

neten Punkt für eine gegebene Axe XX′ zu bestimmen, kann man aus zwei beliebigen Punkten P und Q der Axe zwei Kreisbogen beschreiben, welche durch A gehen, so werden sie sich zum zweiten Mal in einem Punkt B schneiden der dem Punkt A zugeordnet ist, denn in diesem Fall wird AB durch XX′ senkrecht halbirt (§. 3, 2). Um zu einer gegebenen Richtung PR die zugeordnete Richtung zu zeichnen, darf man nur zu zwei Punkten der gegebenen Richtung ihre zugeordneten Punkte aufsuchen, so bestimmen dieselben die zugeordnete Richtung. Es genügt sogar ein einziges Paar zugeordneter Punkte A und B, weil die sich zugeordneten Richtungen in einem Punkt P der Axe convergiren.

Eine Gruppe paarweise einander zugeordneter Punkte mit ihren Verbindungslinien bilden ein einariges Vieleck; dasselbe hat also eine paare Eckenzahl, wenn ein Axenpunkt unter seinen Ecken ist; es hat eine unpaare Eckenzahl, wenn ein Axenpunkt und nicht mehr unter seinen Ecken ist. Das gleichschenklige Dreieck gehört zur letzteren Gattung, das symmetrische Trapez gehört zur ersten Gattung und ist ein einariges Viereck. Weiter gehören hieher das einarige Fünfeck mit einem Axenpunkt, das einarige Sechseck ohne Axenpunkt ꝛc. Eine Gruppe paarweise einander zugeordneter Richtungen mit ihren Convergenzpunkten bilden ein einariges Vielseit. Dasselbe ist von paarer Seitenzahl wenn kein Zuordnungsstrahl unter seinen Richtungen ist, es ist von unpaarer Seitenzahl wenn es einen Zuordnungsstrahl und nicht mehr unter seinen Seiten hat. Das Deltoid ist also ein einariges Vierseit, welches nur ein Paar zugeordneter Ecken hat; an dasselbe reihen sich an: das einarige Fünfseit mit 2 Paar zugeordneter Ecken, das einarige Sechsseit, das ebenfalls nur 2 Paar zugeordneter Ecken hat u. s. w.

§. 6.

Wenn außer der Symmetrieaxe noch ein Paar zugeordneter Punkte gegeben sind, so gestatten diese zur Bestimmung des Systems überflüssigen Stücke einen weiten Spielraum für den Gebrauch des Lineals, so daß zu jedem weiteren gegebenen Punkt, und jeder weiteren gegebenen Richtung ohne Hilfe eines anderes Instruments die zugeordneten Stücke gezeichnet werden können. Um bei diesen Konstruktionen sich zurecht zu finden, hat man nur zu bemerken, daß zwei Paar zugeordneter Richtungen in zwei einander zugeordneten Punkten convergiren und daß zwei Paar zugeordneter Punkte auf zwei einander zugeordneten Richtungen liegen; wie solches aus dem Begriff der Zuordnung unmittelbar folgt, da ja zwei einander zuge-

ordnete Stücke solche sind, die sich in der Congruenz entsprechen. Folgende Beispiele werden den Gebrauch des Lineals zu Konstruktionen an einaxigen Gestalten zeigen.

1) Die Axe XX′ mit zwei einander zugeordneten Punkten A und B ist gegeben; man soll zu dem weiteren Punkt E den zugeordneten Punkt finden. (Fig. 6.)

Zieht man von E nach A und B die Richtungen EA und EB, welche mit der Axe in den Punkten Q und P convergiren, so sind BQ und AP die zwei den erstern zugeordnete Richtungen; ihr Convergenzpunkt F ist also dem gegebenen Punkt E zugeordnet.

2) Die Axe XX′ mit zwei einander zugeordneten Punkten A und B ist gegeben, man soll zu der gegebenen Richtung MN die zugeordnete Richtung zeichnen. (Fig. 6.)

Nachdem man zu irgend einem Punkt E der gegebenen Richtung MN (nach 1) den zugeordneten Punkt F bestimmt hat, darf man nur denselben mit dem Convergenzpunkt C von MN und XX′ verbinden, um die gesuchte Richtung M′N′ zu sehen.

3) In einem gleichschenkligen Dreieck ABC, das mit seiner Höhe CD gegeben ist, durch einen Punkt E in der Fläche desselben eine Parallele mit der Grundlinie zu ziehen. (Fig. 6.)

Sucht man in dem einaxigen System des gleichschenkligen Dreiecks, das CD zur Axe hat, zu E den zugeordneten Punkt F und zieht EF, so ist dieß die gesuchte Parallele (§. 4, 1).

4) Durch die Spitze C des mit seiner Höhe CD gegebenen gleichschenkligen Dreiecks ABC eine Parallele mit der Grundlinie zu ziehen. (Fig. 8.)

Nachdem man (nach 3) EF || AB gezogen hat, suche man den Convergenzpunkt G von DE und BI oder auch denjenigen H von AI und DF, so liegt jeder derselben auf der gesuchten Parallelen. Um zu beweisen, daß GH || AB ist, bemerke man, daß aus dem Parallelismus von EF und AB

folgt $DH:FH = AD:FI = DB:FI;$

ferner $DB:FI = DC:IC;$

folglich $DH:FH = DC:IC;$ mithin CH || IF || AB.

5) Die Querdiagonale BD eines Deltoids um ihre Hälfte zu verlängern. (Fig. 9.)

Nachdem man durch A und C nach Nro. 4 Parallelen mit BD gezogen und die Seiten AD und CD des Deltoids bis zu den Convergenzpunkten G und F mit diesen Parallelen verlängert hat, ziehe man FG, so wird diese Linie die verlangte Verlängerung DH begrenzen. Denn aus dem Parallelismus von CG, BH und AF folgt

$$DH:AF = GD:GA$$
$$ED:AF = CD:CF$$
$$GD:GA = CD:CF$$

folglich $DH:AF = ED:AF$ mithin $DH = ED$.

6) Die Querdiagonale eines Deltoids ABCD um ein Vielfaches ihrer Hälfte zu verlängern, sowie auch die ganze Querdiagonale zu vervielfältigen. (Fig. 9.)

Nachdem man wie in Nro. 5 die Verlängerung $DH = \frac{1}{2} BD$ gemacht hat, suche man den Schnittpunkt I zwischen CH und AF und ziehe GI, so wird diese Linie eine Strecke HK begrenzen, welche gleich $DH = \frac{1}{2} BD$ ist. Dieses Verfahren fortgesetzt entspricht jeder gewünschten Vervielfältigung der halben und der ganzen Diagonale BD.

7) Die Grundlinie AB eines mit seiner Höhe CD gegebenen gleichschenkligen Dreiecks in eine gegebene Anzahl gleicher Theile, etwa 6, zu theilen. (Fig. 10.)

Nachdem man mit AB eine beliebige Parallele gezogen hat, welche die Schenkel des Dreiecks in den Punkten E und F schneidet und in dem hiedurch bestimmten Deltoid CEDF die halbe Querdiagonale EF beiderseits nach 6 vervielfältigt und dadurch die Punkte H, I, K, L bestimmt hat, ziehe man die Richtungen AL und BI, welche in einem Punkt G der Axe CD convergiren. Ein Vielstrahl G, dessen Strahlen durch die Punkte E, F, H und K gehen, vollzieht die verlangte Theilung von AB in den Theilpunkten e, f, k, h, welche diese Strahlen hervorbringen.

B. Centrische Symmetrie.

§. 7.

Ein Vieleck heißt centrisch, wenn es durch eine Gerade in zwei congruente Hälften zerlegt werden kann, deren Theile in gleichem Drehungssinn auf einander folgen. Die in der Congruenz sich entsprechenden Punkte, Linien, Winkel und Theilgestalten heißen auch hier einander symmetrisch zugeordnet, und die Verbindungslinien zweier einander

zugeordneter Punkte heißen **Zuordnungsstrahlen der centrischen Symmetrie.** Die Gerade selbst, welche das centrische Vieleck hälftet, ist also hier nicht Axe, sondern nur Zuordnungsstrahl.

Unter den Dreiecken gibt es keine centrische Gestalt, dagegen ist das Parallelogramm ein centrisches Vieleck; denn jede seiner Diagonalen theilt dasselbe in zwei congruente Hälften, deren Theile in gleichem Drehungssinn der Aufeinanderfolge stehen. Diese Diagonalen sind also Zuordnungsstrahlen, wie überhaupt alle durch seinen Mittelpunkt gehenden Geraden. Die Eigenschaften jeder centrischen Gestalt sind in folgenden Sätzen ausgedrückt:

1) Jede Seite eines centrischen Vielecks ist ihrer zugeordneten Seite parallel, überhaupt sind jede zwei einander zugeordneten Richtungen eines centrischen Systems parallel. (Fig. 11.)

Wenn das Vieleck ABCDEF durch AD in zwei congruente Hälften ABCD und DEFA getheilt wird, welche eine solche Lage haben, daß die aufeinanderfolgenden Seiten AD, AB, BC, CD den Seiten AD, DE, EF, FA einzeln entsprechen, so ist das Vieleck centrisch und es ist auch $\angle DAB = \angle ADE$, folglich $AB \parallel DE$. Auch ist $\angle ABC = \angle DEF$, da B und E einander zugeordnete Ecken sind. Die Dreiecke ABS und DET, welche die zugeordneten Seiten AB und DE, BC und EF mit dem Zuordnungsstrahl AD machen, haben also zwei Paare gleicher Winkel, die Winkel T und S des dritten Paars sind also auch gleich. Es folgt hieraus $BS \parallel ET$ oder $BC \parallel EF$. Aus gleichen Gründen sind auch die übrigen homologen Seiten oder sonstige homologen Linien parallel.

2) Alle Zuordnungsstrahlen des centrischen Vielecks convergiren in Einem Punkt und werden in demselben halbirt. Dieser Punkt heißt daher Mittelpunkt, Centrum, und giebt dem System den Namen. Jede durch den Mittelpunkt gehende Gerade theilt das centrische Vieleck in zwei congruente Hälften gleicher Aufeinanderfolge und ist also ein Zuordnungsstrahl. (Fig. 11.)

Da jede zwei einander zugeordnete Seiten gleich und parallel sind, so bestimmen sie ein Parallelogramm wie ABDE, BCEF ꝛc. Die Diagonalen dieser Parallelogramme halbiren sich gegenseitig. Es müssen daher alle diese Diagonalen, welche zugleich Zuordnungsstrahlen sind, durch die Mitte O von AD gehen, d. h. sie convergiren alle in diesem Punkt O und werden durch denselben halbirt. Zieht man noch durch den Mittelpunkt

O eine Gerade MN nach Belieben, so entstehen zwei Vielecke AMNEF und DNMBC, deren Seiten und Winkel paarweise einander gleich sind und die also bei gleicher Aufeinanderfolge der Theile congruent sind; MN ist also ein Zuordnungsstrahl, der auf dem Umfang des Vielecks zwei einander congruente Punkte bestimmt.

Anm. Die Vielecke ABCDEF und DEFABC sind zwei congruente Vielecke, welche den Mittelpunkt O und alle Strahlen desselben gemein haben, d. h. in der Sprache der neueren Geometrie, es sind zwei congruente in Involution stehende Systeme, welche einen Vielstrahl mit seinen Strahlen gemein haben. Die Involution congruenter Systeme bildet die symmetrischen Systeme. Nun gibt es aber keine andere Art von Involution congruenter Systeme als die des einaxigen und centrischen Systems; es gibt also auch keine andere auf Congruenz gegründete Symmetrie als die einaxige und die centrische. Eine Entwicklung der Symmetrie kann daher nicht durch andere Beziehungen, sondern nur dadurch erzeugt werden, daß mehr als zwei congruente Systeme durch das Mittel der Involution zu einem Ganzen vereinigt werden. In späteren Paragraphen werden wir diese Entwicklung der Symmetrie betrachten.

§. 8.

Jedes centrische System ist durch seinen Mittelpunkt vollkommen bestimmt, sowie auch durch zwei einander zugeordnete Punkte, weil durch sie der Mittelpunkt, der ihre Entfernung hälftet, gegeben ist. Durch zwei einander zugeordnete Richtungen ist das centrische System noch nicht bestimmt, sondern nur durch zwei Paare zugeordneter Richtungen, weil dieselben sich in paarweise einander zugeordneten Punkten schneiden. Die Verbindungslinien dieser zwei Punktpaare convergiren im Mittelpunkt des Systems.

Ist der Mittelpunkt O (Fig. 12) des Systems bekannt, so findet man zu einem gegebenen Punkt A den zugeordneten Punkt B dadurch, daß man auf der Richtung OA auf entgegengesetzter Seite OB = OA nimmt. Soll zur gegebenen Richtung MN die zugeordnete Richtung gefunden werden, so kann man zu zwei beliebig gewählten Punkten A und C dieser Richtung, die zugeordneten Punkte B und D suchen, so wird die Richtung M′N′, welche hiedurch bestimmt ist, der Richtung MN zugeordnet sein. Man kann sich auch auf einen Punkt A beschränken, seinen zugeordneten Punkt B nehmen, und durch denselben die gewünschte zugeordnete Richtung M′N′ || MN ziehen.

Es folgt hieraus, daß jedes centrische Vieleck eine paare Anzahl von Ecken und von Seiten hat. Jedes centrische Viereck ist ein Parallelogramm.

§. 9.

Jedes centrische Vieleck bietet in seinen Zuordnungsstrahlen Strecken mit ihrem Mittelpunkt und Parallellinien in seinen zugeordneten Seiten dar. Diese Elemente der Symmetrie bedingen sich gegenseitig. Die Kenntniß dieser Bedingungen ist zu der Linealkonstruktion am centrischen Vieleck nothwendig; sie beruht auf einem Satz, der in den Lehrbüchern der Elementargeometrie nicht erörtert wird, obgleich er mit Elementarkenntnissen dargethan werden kann. Es ist nämlich bekannt, daß zwei parallele Gerade durch die Strahlen jedes Vielstrahls in proportionale Abschnitte getheilt werden, daß die sich entsprechenden Abschnitte zwischen denselben Strahlen liegen und daß die Lage des Scheitels des Vielstrahls ganz beliebig ist, indem derselbe zwischen oder außerhalb der Parallellinien liegen kann. Dieß vorausgesetzt beweist man leicht folgenden Satz mit seinem Umkehrungssatz.

1) Verbindet man in einem Trapez den Schnittpunkt der convergenten Seiten mit dem Convergenzpunkt der Diagonalen, so halbirt die Verbindungslinie die parallelen Seiten. (Fig. 13.)

Die parallelen Seiten AB und CD des Trapezes ABCD werden von dem Dreistrahl E der durch die convergenten Seiten und die Gerade EF gebildet wird, so getheilt, daß

$$AH:DG = BH:CG.$$

Dieselben parallelen Seiten werden aber auch von dem Dreistrahl F, der durch die Diagonalen und durch EF gebildet wird, so getheilt, daß

$$AH:CG = BH:DG.$$

Aus diesen zwei Proportionen folgt

$$DG:CG = CG:DG.$$

Die letzte Proportion zeigt, daß $DG^2 = CG^2$, $DG = CG$. Hieraus folgt weiter $AH = BH$.

2) Wenn in einem Viereck eine Seite durch die Gerade halbirt wird, welche den Convergenzpunkt der zwei anliegenden Seiten mit dem Convergenzpunkt der Diagonalen verbindet, so ist sie mit ihrer Gegenseite parallel und das Viereck ist ein Trapez. (Fig. 13.)

Wenn die Verbindungslinie EF die Seite AB in dem Punkte H halbirte und diese Seite nicht mit ihrer Gegenseite DC parallel wäre, so würde die Parallele DC′ eine von DC verschiedene Lage annehmen. In diesem Fall müßte die Diagonale BD von den Geraden AC und AC′ in zwei verschiedenen Punkten F und F′ geschnitten werden, es wären also auch EF und EF′ zwei verschiedene Richtungen, die mit AB in zwei verschiedenen Punkten H und H′ convergirten. Nun müßte aber, weil DC′ || AB angenommen ist, H′ in der Mitte von AB sein (n. 1), während doch nach Annahme H diese Mitte ist. Die Parallele kann also keine von DC verschiedene Lage haben, d. h. es ist DC || AB.

§. 10.

Damit dem Lineal eine unbeschränkte Anwendung in einem centrischen Systeme eröffnet werde, müssen zwei Paare einander zugeordneter Richtungen gegeben sein. Dieselben bieten in ihren Convergenzpunkten zugleich zwei Paare einander zugeordneter Punkte, in den Verbindungslinien derselben zwei Zuordnungsstrahlen, welche sich gegenseitig halbiren und den Mittelpunkt des Systems bestimmen. Die hauptsächlichsten Konstruktionen, welche mit dem Lineal im centrischen System ausgeführt werden können, sind folgende:

1) Die Seiten eines gegebenen Parallelogramms ABCD zu halbiren. (Fig. 14.)

Nachdem man durch C zwischen den Schenkeln des Winkels A die Gerade EF nach Belieben gezogen hat, verbinde man den Convergenzpunkt I von AC und DF mit E durch eine Gerade, welche DC in G schneidet, so ist dieser Punkt nach §. 9, 1 die Mitte von CD. Ebenso liefert die Gerade FK, welche den Convergezpunkt K von AC und EB mit F verbindet, die Mitte H von BC; die Richtungen GG′ und HH′ durch den Mittelpunkt gezogen, halbiren die zwei anderen Seiten AB und AD des Parallelogramms.

2) Durch ein Eck C eines gegebenen Parallelogramms ABCD mit der gegenüberstehenden Diagonale BD eine Parallele zu ziehen oder: die Seiten des Parallelogramms zu verdoppeln. (Fig. 15.)

Nachdem man in einem beliebigen Punkt E der Richtung BC zu EB noch die Strahlen EO und ED des Dreistrahls E gezeichnet hat, so ver-

binde man den Convergenzpunkt F von DC und EO mit B durch eine Gerade, welche ED in G schneidet. Die Gerade HK, welche zwischen den Schenkeln des Winkels A durch C und G gezogen wird ist nach §. 9, 2, mit BD parallel und begrenzt die Verlängerung der Seiten AB und AD so, daß AH = 2 AB, AK = 2 AD. Denn es ist BH = CD = AB und DK = BC = AD als Parallele zwischen Parallelen.

3) Durch einen beliebig gegebenen Punkt E in der Fläche des Parallelogramms ABCD eine Gerade mit einer Seite AB desselben parallel zu ziehen. (Fig. 16.)

Nachdem man durch den Punkt E eine Richtung CF zwischen den zwei parallelen Gegenseiten AB und DC beliebig gezogen und dadurch das Trapez AFCD gezeichnet und dessen Mittellinie GH nach §. 9, 1 konstruirt hat, ziehe man durch den Convergenzpunkt I von GH und AE die Richtung FI, welche mit AD in K convergirt, so ist nach §. 9, 2 KE || AF.

4) In der Ebene eines durch das Parallelogramm ABCD gegebenen centrischen Systems zu einer gegebenen Richtung MN die zugeordnete Richtung zu zeichnen. (Fig. 17.)

Zieht man zu den Schnittpunkten G und F der gegebenen Richtung mit den Seiten des gegebenen Parallelogramms die Zuordnungsstrahlen durch den Mittelpunkt O des Parallelogramms, so schneiden dieselben die parallelen Gegenseiten in den zugeordneten Punkten G′ und F′. Die Richtung G′F′ durch G′ und F′ gezogen, ist der gegebenen Richtung MN zugeordnet (§. 7).

5) Mit einer in der Ebene des Parallelogramms beliebig gegebenen Richtung MN durch einen beliebig gegebenen Punkt E eine Parallele zu ziehen. (Fig. 17.)

Hat man zu G und F nach Aufg. 4 die zugeordneten Punkte G′ und F′ gesucht und durch ihre Verbindungslinien das Parallelogramm FGF′G′ gezeichnet, so kann nach Aufg. 3 durch E die Richtung M′N′ || MN gezogen werden.

6) Zu einem in der Fläche des Parallelogramms ABCD gegebenen Punkt E den zugeordneten Punkt zu finden. (Fig. 18.)

Nachdem man durch E die Richtung AI gezogen, und (nach 4) ihre zugeordnete Richtung CI′ gezeichnet hat, darf man nur durch E und den Mittelpunkt O einen Zuordnungsstrahl ziehen, so wird derselbe den verlangten Punkt E′ auf CI′ liefern.

7) Eine in der Ebene des Parallelogramms beliebig gegebene Strecke EF zu verdoppeln und zu halbiren. (Fig. 18.)

Nachdem man zu E und F (nach 6) die zugeordneten Punkte E' und F' gezeichnet hat, kann man (nach 1 und 2) die Verdoppelung und Halbirung der Seite EF des Parallelogramms EFE'F' construiren.

Anm. Man wird selbst finden, wie mit den bisher dargebotenen Mitteln auch eine beliebige Vervielfachung und Theilung einer gegebenen Strecke ausgeführt wird.

C. Zweiaxige Symmetrie.

§. 11.

Die Symmetrie gestattet eine Entwicklung dadurch, daß mehr als zwei Systeme durch die Beziehung von Axen und Vielstrahlen zu einem Ganzen vereinigt werden. Wenn man nun ein einaxiges System mit einem anderen congruenten und deßhalb auch einaxigen System durch eine neue Axe höherer Ordnung verbindet, so sind durch das Mittel von drei Axen vier congruente ebene Systeme mit einander vereinigt. Da hiebei die zwei untergeordneten Axen in Hinsicht der Hauptaxe selbst zwei einander zugeordnete Gerade sind, so convergiren sie mit derselben in einem Punkt und machen gleiche Winkel mit ihr. Diese Zuordnungswinkel der Nebenaxen zu den Hauptaxen üben einen entschiedenen Einfluß auf den Habitus des ganzen vereinigten Systems aus. Wenn endlich dieser Zuordnungswinkel zu einem Rechten anwächst, so coincidiren die zwei Nebenaxen und bilden in ihrer Coincidenz eine einzige zweite Axe, die jetzt mit der ersten vollkommen gleichwerthig ist. Auf diese Weise erhält man ein System von zwei gleichwerthigen Axen, die vier congruente Systeme zu einem Ganzen vereinigen. Dieß ist das Zweiaxensystem und jede Gestalt, welche demselben angehört, heißt zweiaxig.

Ein Vieleck heißt also zweiaxig wenn es durch zwei auf einander senkrechte Axen je in zwei congruente Hälften zerlegt werden kann.

Unter den Dreiecken gibt es keine zweiaxige Gestalt, von den Vierecken sind der Rhombus und das Rechteck zweiaxig.

Der Rhombus ABCD (Fig. 19) wird durch die Diagonalen AC und BD in vier congruente Dreiecke getheilt die paarweise in entgegengesetztem Sinn der Reihenfolge ihrer Theile stehen AOD und COD, COD und

COB, COB und AOB, AOB und AOD. Es ist derselbe eine zweiarige Gestalt, seine Diagonalen sind seine Symmetrieaxen. Zugleich sind aber diese vier Dreiecke auch paarweise in gleichem Sinn der Aufeinanderfolge ihrer Theile einander zugeordnet, nämlich AOB und DOC, AOD und BOC. Die vier im Rhombus vereinigten Systeme sind also auch centrisch gepaart. Der Rhombus gehört also auch der centrischen Symmetrie an und der Convergenzpunkt O seiner Axen ist der Mittelpunkt derselben. Das Rechteck ABCD (Fig. 20) wird durch zwei Gerade EF und GH, die durch den Mittelpunkt O seiner Diagonalen gehen und bezüglich auf den Seiten desselben senkrecht stehen, und also auch unter sich senkrecht sind in vier gleiche Theilrechtecke getheilt, welche ebenfalls paarweise congruent sind und im gleichen und entgegengesetzten Sinn der Aufeinanderfolge ihrer Theile stehen. Das Rechteck ist also für diese Mittellinien als Axen symmetrisch, und, wie der Rhombus auch, zugleich centrisch.

§. 12.

Die Eigenthümlichkeiten des Zweiarensystems, übereinstimmend mit denjenigen des Rechtecks und Rhombus, sind folgende:

1) Jede zweiarige Gestalt ist auch centrisch und hat einen Mittelpunkt der Symmetrie im Convergenzpunkt ihrer zwei Axen.

2) Jeder Punkt des Zweiarensystems, mit Ausnahme der Axenpunkte, ist noch drei anderen Punkten paarweise zugeordnet, zweien derselben, welche sich in den nebenliegenden Axenfeldern befinden, durch die Axen, dem dritten, welcher im Gegenwinkelfeld liegt, durch den Mittelpunkt. Jede Gruppe solcher vier einander zugeordneter Punkte mit ihren Verbindungslinien bildet ein Rechteck.

3) Jede Richtung des zweiarigen Systems, mit Ausnahme der Zuordnungsstrahlen, ist noch drei anderen Richtungen paarweise zugeordnet, zweien derselben, die anliegend sind und mit ihr in Axenpunkten convergiren, durch die Axen, und einer dritten Richtung, welche ihr gegenübersteht, durch den Mittelpunkt. Jede Gruppe von vier einander zugeordneten Richtungen bildet einen Rhombus, dessen Ecken auf den Axen liegen, und dessen Eckenwinkel durch die Axen halbirt werden.

Die zusammengesetzten Gestalten werden durch mehrere solche Gruppen einander zugeordneter Elemente gebildet, und nach der Zahl ihrer Elemente benannt. Das Rechteck ist ein zweiaxiges Viereck, der Rhombus ein zweiaxiges Vierseit. Das zweiarige Achteck A_1 B_1 B_2 A_2 A_3 B_3 B_4 A_4 (Fig. 21) hat zwei Gruppen zugeordneter Ecken A_1, A_2, A_3, A_4 und B_1, B_2, B_3, B_4, eine Gruppe einander zugeordneter Seiten $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, $A_3 B_3$, $A_4 B_4$, und noch zwei Paar zugeordneter Seiten, welche in der Richtung von Zuordnungsstrahlen liegen. A_1 A_4 und A_2 A_3, B_1 B_2 und B_3 B_4.

Das zweiarige Achtseit (Fig. 22) besteht aus zwei Gruppen zugeordneter Seiten $A_1 C_1$, $A_1 C_4$, $A_2 C_2$, $A_2 C_3$ und $B_1 C_1$, $B_1 C_3$, $B_2 C_3$, $B_2 C_4$, welche in den Axenpunkten A_1 und A_2, B_1 und B_2 convergiren und sich in vier einander zugeordneten Punkten C_1, C_2, C_3, C_4 schneiden.

Das zweiarige Sechseck A_1 B_1 B_2 A_2 B_3 B_4 (Fig. 23) hat zwei Ecken in Axenpunkten A_1 und A_2 und noch vier einander zugeordneter Ecken in Fächenpunkten B_1 B_2 B_3 B_4.

§. 13.

Das Zweiaxensystem ist durch seine zwei Axen vollkommen bestimmt, und es können, wenn diese gegeben sind, zu jedem Punkt und zu jeder Richtung die zugeordneten Stücke, oder also das durch sie bestimmte Rechteck oder Rhombus gezeichnet werden.

Sollen in dem System O zu einer Richtung MN (Fig. 19), welche die Axe XX' in A und die Axe YY' in B schneidet, die zugeordneten Richtungen gezeichnet werden, so kann dieß schon ohne Zirkel mittelst der Winkeldreiecke geschehen. Hat man durch Parallellinien mit den Axen das Rechteck AOBD' mit seinen Diagonalen AB und OD' gezeichnet, so sind nur zwischen den Axen, BC und AD || OD, DC || AB, zu ziehen, und diese Linien bilden den Rhombus ABCD der zugeordneten Richtungen.

Soll man aber zu dem Punkt C die zugeordneten Punkte zeichnen (Fig. 20), so wird man ebenfalls parallel mit den Axenrichtungen das Rechteck CGOF, hierauf den Rhombus GFHE der Zuordnungsgruppe, und hieraus endlich durch Parallele mit den Axen, welche durch die Ecken des Rhombus gehen, das Rechteck CBAD der zugeordneten Punkte zeichnen.

Es stehen übrigens das Rechteck und der Rhombus in einem spezifischen Verhältniß zum Kreis, welches der Zirkelkonstruktion eine vortheilhafte Anwendung gestattet. Ein aus dem Mittelpunkt O des Zweiaxen-

Systems beschriebener Kreis, welcher durch einen Punkt C geht, geht zugleich auch durch seine zugeordneten Punkte. Zieht man also in dem Kreis OC noch die Richtungen CD || EF, CB || GH, und CA durch O, so bestimmen diese Richtungen auf dem Kreis die gesuchten Punkte B, D, A. Ebenso berührt ein Kreis O alle Seiten des Rhombus (Fig. 19) der zugeordneten Richtungen, sobald er eine desselben berührt. Weil aber die Tangentenkonstruktion sich weniger empfiehlt, so zeichnet man den Rhombus zur Richtung AB besser dadurch, daß man OC=OA, OD=OB nimmt und diese so bestimmten Axenpunkte durch Gerade mit einander verbindet.

§. 14.

Soll das Lineal ausschließlich zur Konstruktion gebraucht werden, so muß neben den Axen noch eine Gruppe zugeordneter Punkte oder zugeordneter Richtungen gegeben sein. Es ist selbst nicht einmal nöthig, daß die Axen selbst gegeben sind, denn im Rhombus werden sie durch die Diagonalen gebildet, und im Rechteck sind es die Mittellinien, welche nach §. 10, 1 gezeichnet werden können. Folgende Aufgaben werden genügen:

1) **Um ein gegebenes Rechteck ABCD einen Rhombus zu beschreiben, von welchem eine durch B gehende Seitenrichtung MN gegeben ist. (Fig. 24.)**

Nachdem man die Axen EE′ und FF′ nach §. 10, 1 gezeichnet hat, welche mit der gegebenen Richtung in den Punkten H und K convergiren, hat man nur noch zwischen den Axen die Geraden HG, KL und GL durch die Ecken des Rechtecks zu ziehen um den gewünschten Rhombus GHKL zu sehen.

2) **In einem gegebenen Rhombus GHKL ein Rechteck zu zeichnen, von welchem die Lage eines Ecks B auf der Seite HK gegeben ist. (Fig. 24.)**

Die in dem Axenpunkt I convergirenden Geraden LB und HC, und die centrischen Zuordnungsstrahlen BD und AC bestimmen das verlangte Rechteck ABCD unmittelbar.

3) **In dem System des Rechtecks ABCD zu der Richtung MN den zugehörigen Rhombus zu zeichnen. (Fig. 25.)**

Hat man zu den Schnittpunkten p und q der Richtung MN mit den Seiten AB und AD des Rechtecks, die ihnen centrisch zugeordneten Punkte r und s bestimmt, so hat man nur noch durch diese Punktpaare zwischen

den Axen die Geraden EF, GH, und sodann noch FG, EH zu ziehen um den gewünschten Rhombus zu sehen.

4) In dem System des Rechtecks ABCD zu einem beliebig gegebenen Punkt P das zugehörige Rechteck zu zeichnen. (Fig. 26.)

Hat man die Axen und zwischen denselben durch die Punkte P und A die Gerade FE, und zu FE nach 1) den zugehörigen Rhombus EFGH gezeichnet, so hat man nur noch zu P den centrisch zugeordneten Punkt R, und den für die Axe GE zugeordneten Punkt Q, und zu Q den centrisch zugeordneten Punkt S zu suchen, um das gesuchte Rechteck PQRS ziehen zu können.

D. Regelmäßige Systeme.

§. 15.

Das zweiaxige System entsteht aus zwei congruenten einaxigen Systemen, welche durch eine Hauptaxe auf einander bezogen sind, dadurch daß der Zuordnungswinkel der Nebenaxen zur Hauptaxe 90° wird; indem hiedurch die zwei Nebenaxen selbst coincidiren und in dieser Lage zu einer zweiten Hauptaxe sich vereinigen. Wenn aber dieser Zuordnungswinkel 120° annimmt, so bleibt für den Winkel der zwei Nebenaxen gegen einander auch 120° und diese Gleichheit der drei Winkel macht, daß man noch ein drittes congruentes einaxiges System an die Stelle der Hauptaxe setzen und so eine Combination von drei einaxigen Systemen herstellen kann, in welcher sechs congruente Systeme durch das Mittel von drei gleichwerthigen in einem Punkt unter gleichen Winkeln convergirenden Axen zu einem symmetrischen Ganzen vereinigt sind. Ebenso wie man durch drei Axen, die unter gleichen Winkeln convergiren, ein dreiaxiges System erhält, so können auch beliebig viele einaxige Systeme durch Axen, die einen regelmäßigen Vielstrahl bilden, zu einem symmetrischen Ganzen vereinigt werden. Ein solches mehraxiges System gleichwerthiger Axen heißt regelmäßig.

Wie man aber mehrere einaxige Systeme zu einem regelmäßigen System vereinigen kann, so kann man auch mehrere zweiaxige Systeme zu einem regelmäßigen System vereinigen, welches sich deßwegen von dem ersteren System dadurch unterscheidet, daß es centrisch ist, was jenes nicht ist. Das centrische regelmäßige System hat stets eine paare Zahl von Axen, weil diese in zwei Hälften zerfallen, von denen die eine auf der

anderen senkrecht, und ihre ganze Zahl also ein Vielfaches von 2 ist. Umgekehrt ist auch jedes regelmäßige System von paarer Axenzahl stets centrisch, weil in einem regelmäßigen Vielstrahl von paarer Strahlenzahl stets die eine Hälfte der Strahlen auf der anderen senkrecht ist. Jedes regelmäßige System paarer Axenzahl besteht also aus der halben Zahl zweiaxiger Systeme und ist wie diese centrisch.

In einem centrischen regelmäßigen System, dessen Axenzahl eine einfach paare Zahl ist, sind jede zwei zu einander senkrechte Axen nicht von einander abhängig, d. h. sie sind nicht für eine andere zwischen ihnen liegende Axe einander zugeordnet. Wenn man aber ein vieraxiges regelmäßiges System so entwirft, daß das eine Axenpaar die rechten Winkel des anderen Axenpaares halbirt, so sind die Axen jedes Paares für die Axen des anderen Paares einander zugeordnet. Ein Axenpunkt des einen Paares bildet mit seinen zugeordneten Punkten ein Quadrat oder Tetragon. Ein solches System zweier Paare abhängiger Axen besitzt einen höheren Grad der Symmetrie und heißt **tetragonal**. Nun besteht jedes System von paarer Axenzahl aus solchen tetragonalen Systemen und heißt zum Unterschied von anderen regelmäßigen Systemen **tetragonisch**.

Es gibt somit drei spezifisch verschiedene regelmäßige Systeme:

1) das uncentrische regelmäßige System, mit einer unpaaren Axenzahl;

2) das centrische regelmäßige System, mit einer einfach paaren Axenzahl;

3) das tetragonische System mit einer bipaaren Axenzahl.

In allen regelmäßigen Systemen heißt der Convergenzpunkt der Axen **Mittelpunkt** (centrum). Dabei ist aber nicht zu übersehen, daß dieser Mittelpunkt nur in den zwei letztgenannten Systemen ein wirklicher Mittelpunkt der centrischen Symmetrie ist; in den uncentrischen regelmäßigen Systemen besteht kein centrischer Mittelpunkt. In den centrischen regelmäßigen Systemen wird jede regelmäßige Gestalt durch eine durch den Mittelpunkt gehende Gerade halbirt, was in den uncentrischen regelmäßigen Systemen nicht der Fall ist. Dagegen steht in allen drei regelmäßigen Systemen der Mittelpunkt gleich weit von den einander zugeordneten Punkten ab.

Das regelmäßige System wird übrigens nach der Zahl seiner Axen

benannt und heißt für 3, 4, 5, 6 Axen trigonal, tetragonal, pentagonal, hexagonal ꝛc.

Jedes regelmäßige Vieleck, ausgezeichnet durch die Gleichheit seiner Seiten und seiner Winkel, gehört einem regelmäßigen System an, und ist die einfachste seiner Gestalten, mit eben so vielen Seiten und eben so vielen Ecken als Axen. Es findet aber in Hinsicht seiner Axen eine solche Verschiedenheit statt, daß eine besondere Behandlung nöthig ist, wie die folgenden Paragraphen zeigen werden.

§. 16.

Jedes regelmäßige Vieleck unpaarer Seitenzahl gehört einem uncentrischen System an, welches durch folgende Eigenthümlichkeiten ausgezeichnet ist.

1) In jedem regelmäßigen Vieleck von unpaarer Seitenzahl ist jede Halbirungslinie eines Eckenwinkels eine Axe der Symmetrie, welche die gegenüberstehende Seite senkrecht halbirt, und umgekehrt ist auch jede senkrechte Halbirungslinie einer Seite eine Symmetrieaxe, welche durch das gegenüberstehende Eck geht und dessen Winkel halbirt. (Fig. 27.)

Theilt die Gerade AO den Winkel A des regelmäßigen Fünfecks ABCDE in zwei gleiche Theile p und q, so theilt sie das ganze Fünfeck in zwei Vierecke ABCF und AEDF, dessen Winkel p, B, C den Winkel q, E, D einzeln gleich sind, auch sind die Seiten AF, AB, BC den Seiten AF, AE, ED beziehungsweise gleich; die Vierecke ABCF und AEDF sind also congruent und das ganze Fünfeck ABCDE ist also für die Axe AF einaxig symmetrisch, CD als Zuordnungsstrahl der Punkte C und D wird von der Axe AF senkrecht halbirt (§. 4, 1); ebenso wird auch BE senkrecht von ihr halbirt.

2) Alle Halbirungslinien der Eckenwinkel eines unpaaren regelmäßigen Vielecks convergiren in einem einzigen Punkt O und sind die Axen des regelmäßigen uncentrischen Systems, dem das Vieleck angehört. (Fig. 27.)

Da nämlich die Punkte G und K als Mitten der für die Axe AF einander zugeordneten Seiten BC und DE selbst auch zugeordnete Stücke sind, so sind die Halbirungslinien BG und EK für eben diese Axe einander zugeordnet (§. 2), folglich convergiren sie mit ihr in einem Punkt

O (§. 4, 2). Weil nun aus eben dem Grunde je drei aufeinanderfolgende Axen in einem Punkt convergiren, und der Convergenzpunkt schon durch zwei Gerade bestimmt ist, so convergiren alle diese Halbirungslinien der Eckenwinkel in einem Punkt O. Weil sodann jede zwei aufeinanderfolgende Winkel dieses Axenvielstrahls als einander zugeordnet gleich sind, so sind sie alle einander gleich und bilden einen regelmäßigen Vielstrahl, dessen Strahlenzahl der Eckenzahl sowie der Seitenzahl des Vielecks gleich ist. Der Mittelpunkt O steht zwar gleich weit von allen Ecken ab, sowie auch von den Seiten, weil diese Eckenabstände sowie auch die Seitenabstände je unter sich einander zugeordnet und daher gleich sind, nämlich OA = OB = OC = 2c. und FO = OG = OH = 2c. Dagegen ist OA > OH 2c. Das Fünfeck ABCDE ist also trotz seines Mittelpunktes O uncentrisch. Es vereinigt 5 einaxige Systeme, von denen kein einzelnes centrisch ist, ihre Vereinigung kann daher auch nicht centrisch sein.

§. 17.

Jedes regelmäßige Vieleck von paarer Seitenzahl gehört einem regelmäßigen centrischen System an und theilt dessen Eigenthümlichkeiten.

1) In einem regelmäßigen Vieleck von paarer Seitenzahl ist jede Halbirungslinie eines Eckenwinkels zugleich Symmetrieaxe und centrischer Zuordnungsstrahl, geht durch das gegenüberstehende Eck und halbirt dessen Winkel. (Fig. 28.)

Die Gerade AD, welche den Eckenwinkel A des regelmäßigen Sechsecks ABCDEF halbirt, theilt dasselbe in zwei Theilgestalten ABCD und AFED, in welchen die Winkel p, B, C und q, F, E einzeln einander gleich sind, auch sind die Seiten AD, AB, BC bezüglich den Seiten AD, AF, EF gleich. Die Vierecke ABCD und AFED sind also congruent, und weil ihre Stücke in entgegengesetztem Drehungssinn stehen, so ist das Sechseck für AD als Axe einaxig. Hieraus folgt aber, daß auch die Winkel r und s gleich sind, in welche der Eckenwinkel D durch die Richtung AD getheilt wird. Da aber die Eckenwinkel A und D gleich sind, so sind auch ihre Hälften gleich p = s, q = r. Demnach sind auch die Winkel p, B, C den Winkeln s, E, F einzeln gleich, so wie die zwischen diesen Winkeln liegenden Seiten, es ist also auch Vieleck ABCD ≅ Vieleck DEFA. Das Sechseck ABCD ist also für AD als Zuordnungsstrahl centrisch symmetrisch (§. 7).

2) In einem regelmäßigen Vieleck von paarer Seitenzahl ist jede senkrechte Halbirungslinie zugleich Symmetrieaxe und centrischer Zuordnungsstrahl; auch halbirt sie die gegenüberstehende Seite senkrecht. (Fig. 28.)

Man beweist, wie im vorausgehenden Fall, daß die senkrechte Halbirungslinie der Seite AB das Sechseck ABCDEF in zwei Theilgestalten theilt, die in doppelter Weise congruent sind, nämlich

$$GBCDH \cong GAFEH \text{ und } GBCDH \cong HEFAG,$$

die Gerade GH ist aso sowohl Symmetrieaxe als auch centrischer Zuordnungsstrahl (§. 2 und §. 7).

3) Ein regelmäßiges Vieleck von paarer Seitenzahl hat eben so viele Symmetrieaxen als Ecken; die eine Hälfte derselben halbirt die Eckenwinkel, die andere Hälfte halbirt die Seiten senkrecht, aber sowohl die einen als auch die anderen convergiren in einem Punkt, dem Mittelpunkt des Vielecks und bilden einen regelmäßigen Vielstrahl, dessen Strahlen paarweise auf einander senkrecht stehen. Jedes Paar senkrechter Axen gehört einem centrischen System an, und die Vereinigung aller Axenpaare ist daher ein centrisches regelmäßiges System. (Fig. 28.)

Weil sowohl die Eckenaxen als auch die Seitenaxen Zuordnungsstrahlen der centrischen Symmetrie sind, so convergiren sie alle in einem Punkt O, dem Mittelpunkt der centrischen Symmetrie (§. 7, 2), und bilden einen Vielstrahl. Jede zwei auf einander folgenden Winkel dieses Vielstrahls sind für den mittleren Strahl als Axe einander zugeordnet und daher gleich. Sind aber diese Winkel paarweise einander gleich, so sind sie überhaupt alle einander gleich und der Vielstrahl der Axen ist regelmäßig. Die Winkel des vollständigen Sechsstrahls oder des Halbzwölfstrahls messen $^{360}/_{12}$ oder 30°. Drei solcher Winkel machen also einen Rechten, und die 6 Axen stehen also paarweise senkrecht auf einander. Ein solches Paar, wie AD und IK, theilen das ganze Sechseck in vier congruente Trapeze OABI, ODCI, ODEK, OAFK, das Sechseck ist also in Hinsicht dieses Axenpaars zweiarig, weil nun das Sechseck drei Paare solcher senkrechten Axen hat, so sind in demselben drei zweiarige Systeme vereinigt, das ganze System ist also centrisch regelmäßig, und der Mittelpunkt O ist wirklich ein Centrum der Symmetrie, und hälftet jede Symmetrieaxe, weil sie zugleich Zuordnungsstrahl dieser Symmetrie ist.

§. 18.

Ein regelmäßiges Vieleck von bipaarer Seitenzahl erreicht noch einen höheren Grad der Regelmäßigkeit, es ist nicht nur centrisch, sondern es ist tetragonisch, das heißt es ist eine Vereinigung von tetragonalen Systemen. (Fig. 30.)

Das Zwölfeck ABC...M mit 12 Seiten und 12 Axen hat im Mittelpunkt O einen regelmäßigen vollständigen Zwölfstrahl oder einen Halbvierundzwanzigstrahl; ein Winkel desselben mißt also $^{360}/_{24}$ oder 15°; drei aufeinanderfolgende Winkel bilden also eine Summe von 45°. Die zwölf Axen zerfallen also in drei Gruppen regelmäßiger Vierstrahlen. Eine jede solche Gruppe konstituirt ein tetragonales System. Das ganze System des regelmäßigen Zwölfecks ist also eine Vereinigung von drei tetragonalen Systemen. Dieselben Verhältnisse kehren bei jedem anderen regelmäßigen Vieleck von bipaarer Seitenzahl wieder.

§. 19.

Jedes regelmäßige System ist durch seine Axen, ja sogar schon durch zwei auf einander folgende Axen bestimmt, indem bei zwei solchen Axen durch Vervielfältigung des Axenwinkels der regelmäßige Vielstrahl des Mittelpunkts gezeichnet werden kann.

1) Jeder Axenpunkt ist wieder anderen Axenpunkten zugeordnet, die ebenso weit vom Mittelpunkt abstehen als er. Eine Gruppe solcher einander zugeordneter Axenpunkte bilden mit ihren Verbindungslinien ein regelmäßiges Vieleck, das so viele Ecken hat, als Axen vorhanden sind. Alle Ecken eines solchen Vielecks liegen auf dem Umfang eines Kreises, welcher aus dem Mittelpunkt des Systems beschrieben ist. Das Vieleck kann also mittelst eines solchen Kreises leicht gezeichnet werden. Es sind jedoch nicht alle Schnittpunkte dieses Kreises mit den Strahlen des Axenvielstrahls Ecken des zu zeichnenden Vielecks, sondern diese Eigenschaft kommt nur den Punkten zu, welche auf den abwechselnden Halbstrahlen des Axenvielstrahls liegen. (Fig. 28.)

Ist A ein Axenpunkt eines hexonalen Systemes O, so wird ein aus O beschriebener und durch A gehender Kreis die abwechselnden Axen in den Punkten B, C, D, E, F schneiden, welche paarweise für die Gruppe

der drei übergangenen Axen einander zugeordnet sind. Hätte man den Punkt auf einer der übergangenen Axen genommen, z. B. in G, so hätte sich ein Sechseck GILHKM gefunden, das in einer gegen das erste um einen Winkel von 30° gedrehten Stellung sich befindet.

2) Jede Richtung, welche zu einer Axe senkrecht ist, ist wieder anderen Richtungen zugeordnet die zu den übrigen Axen senkrecht sind und in gleichen Entfernungen vom Mittelpunkt liegen. Diese Gruppe zusammengehöriger Normalrichtungen mit ihren Convergenzpunkten bilden ein regelmäßiges Vielseit, das so viel Seiten hat, als Axen vorhanden sind. Die Convergenzpunkte des regelmäßigen Vielseits liegen alle wieder auf den Axenrichtungen (§. 4, 2). Wenn man deßhalb bei den zunächst liegenden Convergenzpunkten stehen bleibt, so bestimmt das Vielseit ein ordinäres Vieleck des Systems, wenn man aber zu entfernteren Convergenzpunkten übergeht, so erzeugt es eine sternförmige Gestalt, oder einen Vielstern. Uebrigens berühren alle Seiten eines regelmäßigen Vielseits einen aus dem Mittelpunkt des Systems beschriebenen Kreis, welcher also zu seiner Construktion dienlich ist. Weil übrigens die Tangentenkonstruktion weniger beliebt ist, so zieht man gewöhnlich vor, durch eine Gruppe seiner zugeordneten Ecken auf die Konstruktion des regelmäßigen Vielecks überzugehen. (Fig. 29.)

Ist die Richtung PT ⊥ OA gegeben und berührt ein aus dem Mittelpunkt O des hexagonalen Systems beschriebener Kreis diese Richtung, so berührt er auch alle ihr zugeordneten Richtungen, welche auf den abwechselnden Axen senkrecht stehen und durch die Schnittpunkte B, C, D, E, F des Hilfskreises gehen. Bleibt man bei den nächstliegenden Convergenzpunkten dieser sich zugeordneten Richtungen stehen, so bilden sie das Sechseck GHIKLM, geht man aber zu den entfernteren Convergenzpunkten über, die auch auf den Axenrichtungen liegen müssen, so erscheint der Sechsstern PQRSTU, die eigentliche Gestalt des regelmäßigen Vielseits. In einem System von größerer Axenzahl bekommt man mehrere regelmäßige Vielsterne, indem es noch andere, weiter entferntere Convergenzpunkte gibt, und jede Gruppe zusammengehöriger Convergenzpunkte wieder einen regelmäßigen Vielstern liefert. Weil jede solche Gruppe wie PQRSTU Ecken

eines regelmäßigen Vielecks sind, so kann das regelmäßige Vielseit auf die Konstruktion des regelmäßigen Vielecks zurückgeführt werden.

3) Jeder Flächenpunkt eines regelmäßigen Systems ist einer Anzahl anderer Flächenpunkten zugeordnet, die ganze Gruppe dieser zusammengehörigen Flächenpunkte mit ihren Verbindungslinien bilden ein Vieleck des regelmäßigen Systems, welches doppelt so viele Ecken hat, als das System Axen hat. Alle Ecken eines solchen Vielecks stehen als einander zugeordnete Punkte gleich weit von dem Mittelpunkt O des Systems ab und liegen also auf dem Umfang eines aus O beschriebenen Kreises. (Fig. 31.)

Sind die Axen x, y, z, u eines tetragonalen Systems O und ein Flächenpunkt A gegeben, so findet man die übrigen dem Punkt A zugeordneten Punkte, am besten durch einen aus O durch A gezogenen Kreis und ein Quadrat zuz'u', welches durch die Axenrichtungen xx' und yy' bestimmt ist. Dieser Kreis und dieses Quadrat durchschneiden sich in den Punkten des gewünschten tetragonalen Achtecks ABCDEFGH, dessen Ecken paarweise einander zugeordnet sind. Unter diesen acht Ecken gibt es jedoch zwei Gruppen, deren Ecken für keine der vier Axen einander zugeordnet sind; diese Ecken sind ACEG und BDFH, jede derselben gehört einem Quadrat an, das gegen die Quadrate des Systems, die aus den Axenpunkten entspringen, in einer mehr oder weniger gedrehten Lage sich befindet.

4) Jede Richtung eines regelmäßigen Systems, welche zu keiner Axe senkrecht steht, ist einer Anzahl anderer schiefen Richtungen zugeordnet; die ganze Gruppe dieser zusammengehörigen schiefen Richtungen mit ihren Convergenzpunkten bilden ein Vielseit des regelmäßigen Systems, welches doppelt so viele Seiten hat, als das System Axen hat. Alle Seiten eines solchen Vielseits stehen als einander zugeordnete Richtungen gleichweit von dem Mittelpunkt O des Systems ab und berühren also einen aus diesem Mittelpunkt beschriebenen Kreis. Weil aber die Tangentenkonstruktion nicht bequem ist, so bestimmt man ein solches Vielseit, durch die Konvergenzpunkte seiner Seiten, welche auf den Axenrichtungen liegen und zwei regelmäßigen Vielecken angehören.

Ist in dem tetragonalen Systeme der Axen x, z, y, w (Fig. 32) eine schiefe Richtung gegeben, welche die Axen x und z in den Punkten A und B schneidet, so zeichnet man das zu dieser Richtung gehörige Achteck am besten, wenn man aus O zwei Kreise beschreibt, welche die Axen x und y, die durch die Punkte A und C′ gehen, in den Punkten A, C, E und G, sowie in den Punkten A′, C′ E′ G′ schneiden, und die Punkte der einen Gruppe mit den Punkten der anderen Gruppe verbindet. Diese Verbindungslinien bilden das gesuchte Achtseit, welches je nach den Convergenzpunkten, bei denen man stehen bleibt, als ein eigentliches tetragonales Achtseit ABCDEFGH, oder als ein achtseitiger Vielstern A′BC′DE′FG′H erscheint.

§. 20.

In jedem regelmäßigen System gibt es vier Arten von Gestalten, nämlich:

1) das Vieleck zusammengehöriger Axenpunkte,
2) das Vielseit zusammengehöriger Normalrichtungen,
3) das Vieleck zusammengehöriger Flächenpunkte,
4) das Vielseit zusammengehöriger schiefer Richtungen.

Die vollständigen Vielecke und Vielseite der ersten und zweiten Art liefern selbst wieder viele ordinären Vielecke und Vielseite, deren Gestalten nicht von einander verschieden sind; denn die zusammengehörigen Seiten dieser vollständigen Vielecke sind auf den Axen normal gestellt, und die Convergenzpunkte der zusammengehörigen Ecken der vollständigen Vielseite liegen auf den Axen des Systems. Die Unterscheidung von Vielecken und Vielseiten wird also überflüssig; und es genügt ein gemeinschaftlicher Name. Das ordinäre Vieleck zusammengehöriger Axenpunkte, sowie dasjenige zusammengehöriger Normalrichtungen heißt daher im Dreiaxensystem Trigon,* im Vieraxensystem Tetragon oder Quadrat u. s. w. Diese einfacheren Gestalten geben andererseits dem Axensystem seinen Namen; das Dreiaxensystem heißt trigonal, das Vieraxensystem tetragonal &c.

* Diese von einigen Mineralogen längst schon eingeführte Nomenklatur, wonach die Namen Trigon, Tetragon, Pantagon &c. für regelmäßiges Dreieck, Viereck, Fünfeck &c. benützt werden, entspricht einem Bedürfniß kurzer Bezeichnungsart und muß also von den Geometern ebenso angenommen werden, wie der Name des Rhomboeders es geworden ist.

Die zwei folgenden Arten führen, auch wenn man von den vollständigen Vielecken und Vielseiten zu den ordinären übergeht, zu wesentlich verschiedenen Formen; und müssen also auch besondere Namen haben.

Das Vieleck zusammengehöriger Flächenpunkte hat doppelt so viele Ecken als Axen. Dasselbe kann also dadurch bezeichnet werden, daß die Eckenzahl des Vielecks neben der Axenzahl des Systems in den Namen der Gestalt aufgenommen wird. Dadurch erhält man in den besonderen Systemen für solche Formen die Namen trigonales Sechseck, tetragonales Achteck ꝛc., welche keinerlei Zweideutigkeit einschließen.

Das Vielseit zusammengehöriger schiefer Richtungen hat doppelt so viele Seiten als Axen. Es muß daher auch hier die Seitenzahl des Vielseits neben der Axenzahl des Systems in den Namen aufgenommen werden. Dadurch erhält man in den besonderen Systemen die Benennungen trigonales Sechsseit, tetragonales Achtseit ꝛc.

Bei allen diesen Arten der Gestalten regelmäßiger Systeme macht sich noch eine andere Verschiedenheit geltend, die eine besondere Bezeichnung verlangt, nämlich die, ob die Seiten des Vielecks sich in einem inneren oder in einem äußeren Punkt bei ihrer Verlängerung schneiden. Die letztere Gestalt heißt ihrer Form nach Stern. So oft nun das Vieleck sternförmiges Aussehen hat, nimmt es den Namen Stern an.

Hienach sind die Gestalten des trigonalen Systems:

das Trigon, das trigonale Sechseck,
das trigonale Sechsseit und der sechsseitige Dreistern.

Die Gestalten des tetragonalen Systems sind:

das Tetragon,
das tetragonale Achteck, das tetragonale Achtseit und
der achtseitige Vierstern.

In den anderen Systemen, welche mehr als 4 Axen haben, trifft man noch eine Form weiter, im hex. System z. B. neben dem sechsseitigen Sechsstern auch den zwölfseitigen Sechsstern.

§. 21.

Wenn das regelmäßige System nicht durch seine Axen, sondern durch eines seiner regelmäßigen Vielecke gegeben ist, so können mit Ausnahme des trigonalen Systems alle seine Gestalten schon mit dem Lineal allein gezeichnet, ja es können noch andere Konstruktionen vorgenommen werden; man kann nämlich an irgend einem anderen gegebenen Ort ein gleiches

regelmäßiges System mit allen seinen Gestalten entwerfen, und eine jede regelmäßige Gestalt desselben nach Verlangen theilen und vervielfältigen.

Das trigonale System ist das einzige, welches aus einem gegebenen Trigon mittelst des Lineals noch nicht entworfen werden kann. Damit dieß ausgeführt werden könne, muß außer dem Trigon noch der Mittelpunkt des Systems gegeben sein. Das tetragonale System kann aus einem gegebenen Quadrat mittelst des Lineals zwar entworfen werden, allein es verlangt doch eine Vorarbeitung, um die Axen des Systems zu bekommen, welche übrigens nach den Regeln des §. 10, 1 leicht auszuführen ist. Das pentagonale System und überhaupt alle regelmäßigen Systeme von größerer Axenzahl als 4, gestatten dem Lineal unmittelbar die ausgedehnteste Anwendung. Um diese Unterschiede fühlbar zu machen werden in den folgenden Paragraphen die Linealkonstruktionen am trigonalen, tetragonalen und hexagonalen System einzeln vorgenommen werden.

§. 22.

Es ist das Trigon ABC mit seinem Mittelpunkt O, d. i. mit seinen Axenrichtungen AO, BO und CO gegeben.

1) Man soll mittelst des Lineals ein zweites Trigon des Systems zeichnen, von welchem ein Eck A′ auf der Axe AO gegeben ist. (Fig. 33.)

Da OC und OB Symmetrieaxen des Systems sind, so kann man für dieselben die dem Punkt A′ zugeordneten Punkte B′ und C′ nach §. 6, 1 bestimmen, und sodann die Seiten des gesuchten Trigons A′B′C′ ziehen.

2) Man soll in dem gegebenen trigonalen System das trigonale Sechseck zeichnen, welches zu einem beliebig gegebenen Flächenpunkt D gehört. (Fig. 34.)

Hat man für die Axen AO und CO, zwischen welchen der gegebene Flächenpunkt D liegt, nach §. 6, 1 die zugeordneten Punkte E und F gezeichnet und zwischen den Axen die Zuordnungsstrahlen MN und QR gezogen, so vollendet man leicht nach Nro. 1 die Trigone MNP und QRS. Diese zwei Trigone bilden in ihren Schnittpunkten das gesuchte trigonale Sechseck FDEGHI.

3) Man soll in dem gegebenen trigonalen System das trigonale Sechsseit zeichnen, welches durch eine beliebige schiefe Rich-

tung MN bestimmt ist, die zwei auf einander folgende Axen in den Punkten D und E schneidet. (Fig. 35.)

Nachdem man zu D und E die zugehörigen Trigone DFH und EGI nach Nro. 1 gezeichnet hat, so sind nur noch die Ecken dieser Trigone mit einander zu verbinden um das gesuchte Sechsseit DEFGHI zu sehen.

4) Die Seiten des Trigons ABC zu verdoppeln. (Fig. 36.)

Durch Anwendung der Konstruktion §. 6, 4 zieht man zwischen den Axen DF || AB und hierauf durch A und B die Geraden EF und DE. In dem gewonnenen Trigon DEF zieht man auf gleiche Weise durch die Ecken Parallelen mit den gegenüberstehenden Seiten GH || FE, IK || ED, LM || DF, so bestimmen diese Richtungen die gesuchten Verdoppelungen AG = 2AB, AH = 2AC ꝛc.

5) Zu dem gegebenen Trigon ABC dasjenige zugehörige trigonale Sechsseit zu zeichnen, welches für sich die Gestalt des Hexagons hat. (Fig. 37.)

Nachdem man nach der Regel von Nro. 4 durch die Richtungen GH, IK, LM die Verdoppelung der Seiten ausgeführt hat, darf man nur jede der Ecken A, B, C des gegebenen Trigons mit den Punkten der Verdoppelung verbinden, so werden diese Verbindungslinien AM, AI, BL, BH, CG, CK das gewünschte Hexagon ARCSB erzeugen.

§. 23.

Es ist ein Quadrat ABCD gegeben:

1) Man soll die vier Symmetrieaxen seines regelmäßigen Systems zeichnen. (Fig. 38.)

Die Diagonalen AC und BD sind seine zwei Eckenaxen; die Geraden EF und GH welche seine Seiten halbiren und nach §. 10, 1 gezeichnet werden, sind seine Seitenaxen.

2) Zu dem Punkt I auf der Seite des gegebenen Quadrats ABCD das zugehörige tetragonale Achteck zu zeichnen. (Fig. 39.)

Nachdem man die Axen AC, BD, EF und GH gezeichnet und für die Axe AC zu I den zugehörigen Punkt K nach §. 6, 1 bestimmt und durch die centralen Zuordnungsstrahlen die Punkte P und N angemerkt hat, zieht man zwischen den Seitenaxen durch eben diese Punktpaare I und K, P und N die Geraden PQ, RS und sodann noch QR, PS, so ist PQRS ein zweites Quadrat des Systems, welches mit dem gegebenen Quadrat

in seinen Durchdringungspunkten das verlangte Achteck IKLMNPUW hervorbringt.

3) Zu einem Axenpunkt P des gegebenen Quadrats das zugehörige Quadrat des tetragonalen Systems zu zeichnen. (Fig. 39.)

Liegt der Punkt P auf der Seitenaxe EF, so benützt man die Eckenaxen als Symmetrieaxen um nach §. 6, 1 die zugeordneten Punkte Q, R und S zu zeichnen. Wäre der Punkt P auf einer Eckenaxe gegeben, so lieferten die Seitenaxen den gleichen Dienst.

4) Zu einem beliebigen Flächenpunkt P das zugehörige tetragonale Achteck des Systems zu zeichnen. (Fig. 40.)

Hat man für AC als Symmetrieaxe zu P den zugeordneten Punkte Q, und den Zuordnungsstrahl eh gezogen, und (nach 3) das Quadrat efgh gezeichnet, so liefert die Anwendung von Nro. 2 das zweite Quadrat abcd, welches mit dem ersten das verlangte Achteck PQRSTÜVW hervorbringt.

5) Zu einer beliebigen schiefen Richtung MN, welche zwei Axen des Quadrats in den Punkten c und h schneidet das zugehörige tetragonale Achtseit zu zeichnen. (Fig. 41.)

Die zu c und h gehörigen und nach 3 gezeichneten Quadrate egfh und cdab liefern in den Verbindungslinien ihrer Ecken das gesuchte Achtseit afbhcedg.

6) Zu einer beliebigen Centralrichtung LI des Quadrats ABCD im Mittelpunkt O die übrigen Strahlen eines regelmäßigen Vierstrahls zu zeichnen. (Fig. 42.)

Man zeichne zu I nach Nro. 2 das zugehörige Achteck und bemerke die vier Ecken I, K, L, M desselben, welche für keine der Symmetrieaxen einander zugeordnet sind, so bilden dieselben ein Quadrat IKLM, die Eckenaxen IL, MK und die Seitenaxen PQ und RS desselben, nach Nro. 1 gezeichnet, bilden den gesuchten regelmäßigen Vierstrahl.

7) In einem beliebigen Punkt O′ zu dem gegebenen Strahl O′S′ die übrigen Strahlen des regelmäßigen Vierstrahls zu zeichnen. (Fig. 43.)

Ziehe im Quadrat ABCD mit O′I′ durch O die Richtung LI || O′I′ und konstruire in O zu OI den regelmäßigen Vierstrahl O, IPKR nach Nro. 6, und ziehe mit den Strahlen desselben durch O′ Parallellinien (§. 10, 5), so setzen dieselben den gesuchten Vierstrahl zusammen.

§. 24.

Es ist ein Hexagon ABCDEF gegeben:

1) Man soll seine Axen zeichnen: (Fig. 44.)

Die Diagonalen AC, BD, CE, DF, AE, BF convergiren in Punkten G, H, I, K, L, M der Seitenaxen, welche mit den Eckenaxen AD, BE, CF die Axen des Systems sind.

2) Man soll zu einem Strahl OK des Mittelpunkts einen regelmäßigen Sechsstrahl zeichnen. (Fig. 45.)

Man konstruirt zuerst zu dem Punkt K des Umfangs die zugeordneten Punkte L, M, N 2c., so bilden die abwechselnden Strahlen OK, OM, OP einen regelmäßigen Dreistrahl, welcher im gegebenen Hexagon ein zweites inbeschriebenes Hexagon bestimmen, dessen Seitenaxen nach 1 gezeichnet werden. Die Axen dieses inbeschriebenen Hexagons bilden den verlangten regelmäßigen Sechsstrahl.

3) In irgend einem Punkt O′ zu einem gegebenen Strahl O′I′ einen regelmäßigen Sechsstrahl zu zeichnen.

Die Konstruktion geschieht ganz wie §. 23, 7.

E. Der Kreis als Inbegriff vollendeter Regelmäßigkeit.

§. 25.

Der Kreis ist die einfache Gestalt eines regelmäßigen Systems von unendlich großer Axenzahl. Er schließt deßwegen alle Arten der Symmetrie in sich ein, welche seither betrachtet worden sind.

Der Kreis ist für jeden Durchmesser als Axe einaxig symmetrisch, da jeder Durchmesser den Kreis in zwei congruente Hälften theilt; jede zum Durchmesser senkrechte Sehne ist ein Zuordnungsstrahl dieser Axe, wird von ihr halbirt und verbindet zwei einander zugeordnete Punkte des Umfangs. Der Kreis ist für sein Centrum als Mittelpunkt der Symmetrie centrisch; alle Durchmesser des Kreises sind centrische Zuordnungsstrahlen, und werden im Mittelpunkt halbirt.

Der Kreis ist für jedes Paar senkrechter Durchmesser als Symmetrieaxen zweiaxig symmetrisch, denn er wird durch dieselben in vier congruente Sektoren getheilt. Jeder Punkt des Umfangs ist für diese zwei senkrechten Durchmesser als Axen noch drei anderen Punkten zugeordnet, und diese

vier sich zugeordneten Punkte bilden ein Rechteck, dessen Diagonalen Durchmesser des Kreises sind; ebenso bilden die Tangenten dieser vier Punkte ein zweiaxiges Vierseit oder Rhombus.

Der Kreis verhält sich für jeden regelmäßigen Dreistrahl als trigonales System, für jeden Vierstrahl als tetragonales System 2c., kurz er vereinigt alle regelmäßigen Systeme, und man darf nur einen entsprechenden regelmäßigen Vielstrahl im Mittelpunkt anbringen, sogleich vertheilen sich alle Punkte und Richtungen des Kreises nach Gruppen einander zugeordneter Stücke, und es erscheinen die regelmäßigen Vielecke und Vielseite des Systems.

In dieser Eigenschaft unendlicher Regelmäßigkeit ist die unbeschränkte Anwendung des Kreises oder vielmehr des Zirkels begründet, die der geometrische Zeichner auszubeuten versteht; deßwegen ist der Zirkel nicht nur das Instrument, welches für sich allein schon allen Forderungen genügen kann, sondern wenn in einer Ebene ein fester Kreis gegeben ist, so hat auch das Lineal an ihm einen Anhalt um ebenfalls, wenn schon öfters mit einiger Weitläufigkeit, jegliche Konstruktion auszuführen. Unter diesen Linealkonstruktionen sind einige durch ihre Einfachheit geeignet praktische Bedeutung zu gewinnen. Diese werden zum Schluß dieses Buches in den folgenden Paragraphen noch aufgeführt werden. Wer sich weiter für diese Sache interessirt, wird in dem im Eingange erwähnten Schriftchen des Prof. Steiner Belehrung finden.

§. 26.

Die einfacheren Linealkonstruktionen am Kreis setzen voraus, daß man parallele und senkrechte Geraden zu ziehen wisse, wie dieß in folgenden Aufgaben behandelt ist.

1) Zu einer gegebenen Sehne AB im Kreis O den parallelen und den senkrechten Durchmesser mit dem Lineal zu zeichnen. (Fig. 46.)

Die Endesdurchmesser AC und BD liefern das Rechteck ABCD: und die Symmetrieaxen desselben, welche nach §. 10, 1 gezeichnet werden, liefern die gesuchten Durchmesser GH $\perp$ AB und EF || AB.

2) Zu dem gegebenen Durchmesser AB eines Kreises O durch einen gegebenen Punkt C des Kreisumfangs die parallele und die senkrechte Sehne zu ziehen. (Fig. 47.)

Nachdem man durch einen zweiten Durchmesser CD das Rechteck ACBD gezeichnet hat, kann nach §. 10, 2 die Richtung CE || AB gezogen und dadurch die parallele Sehne CF gezeichnet werden. Der Durchmesser FG führt zur Sehne CG, welche zu dem Durchmesser AB senkrecht ist.

3) Zu einem gegebenen Durchmesser AB eines Kreises den senkrechten Durchmesser zu ziehen. (Fig. 48.)

Hat man zu AB die parallele Sehne EF nach Nro. 2 gezeichnet, so bilden die Punkte A, B, F, E ein symmetrisches Trapez, dessen Symmetrieaxe GK gezeichnet werden kann (§. 9, 1), welche den senkrechten Durchmesser CD liefert.

4) In dem Umfang C eines Kreises O eine Tangente an denselben Kreis zu ziehen. (Fig. 49.)

Nachdem man zwei senkrechte Durchmesser AB und CD gezogen, und dadurch das inbeschriebene Quadrat ACBD bestimmt hat, kann man nach §. 10, 2 durch C mit AB eine Parallele MN ziehen, so wird dieselbe die verlangte Tangente sein.

§. 27.

Das inbeschriebene Quadrat ABCD, welches durch zwei senkrechte Durchmesser bestimmt wird, bietet seinerseits wieder die Mittel um andere regelmäßige Vielecke vermittelst des Lineals in einen gegebenen Kreis einzuzeichnen.

1) Ein Octagon in einen gegebenen Kreis O einzuzeichnen. (Fig. 50.)

Zieht man in dem inbeschriebenen Quadrat ABCD die Symmetrieaxen ef und gh, so sind dieselben zugleich Eckenaxen des Octagons AEBGCFDH, welches sogleich eingezeichnet werden kann.

2) Ein Trigon in einen Kreis O einzuzeichnen. (Fig. 51.)

Verbindet man die Endpunkte e und f der Symmetrieaxen eg und fh des inbeschriebenen Quadrats ABCD durch eine Gerade, so bildet sie im Kreis die Seite EF des inbeschriebenen Trigons. Die Punkte E und F mit A verbunden liefern das Trigon AEF.

Man wird nämlich sehen, daß EF den Halbmesser OB senkrecht halbirt und also BO = OF = BF, mithin ist Bogen BF = $^1/_6$ Kreis O und Bogen EF = $^1/_3$ Kreis O; ebenso ist Bogen AF = AE = $^1/_3$ Kreis O.

3) Ein Hexagon in den Kreis O einzuzeichnen. (Fig. 52.)

Zieht man die Sehne EF durch Endpunkte e und f der Symmetrie-axen eg und fh des inbeschriebenen Quadrats ABCD, und die Sehne GH durch die anderen Endpunkte dieser Axen, so bestimmen sie unmittelbar das gesuchte inbeschriebene Hexagon AHEBFG.

4) Ein Dodekagon in den Kreis O einzuzeichnen. (Fig. 53.)

Die vier Endpunkte der Symmetrieaxen eh und fg paarweise mit einander verbunden liefern vier Sehnen des Kreises EF, GH, IK, LM, welche mit A, B, C und D den Kreisumfang in 12 gleiche Theile theilen und also das verlangte Dodekagon bestimmen.

Zweites Buch.

Vom Gebrauch der Winkeldreiecke.

§. 28.

Sollen wirklich symmetrische Gestalten entworfen oder auch nur die Elemente derselben gezeichnet werden, so ist das blose Lineal nicht mehr ausreichend; man muß hiezu neue Instrumente haben, welche bereits Elemente der Symmetrie einschließen. Unter diesen sind die Winkeldreiecke von ausgezeichnetem Gebrauch, obgleich ihre Anwendbarkeit beschränkt ist. Es werden hauptsächlich zwei Winkeldreiecke benützt: das eine ist seiner Gestalt nach ein rechtwinkliges gleichschenkliges Dreieck und hat neben dem rechten Winkel noch zwei halbe rechte Winkel (45°), das andere ist ein ungleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck, das neben dem rechten Winkel noch einen Drittelsrechten (30°) und einen Zweidrittelsrechten (60°) enthält.

Die Anwendung der Winkeldreiecke ist besonders zu folgenden Geschäften vortheilhaft:

1) Zur Konstruktion von Parallelen und zur Theilung der Geraden in gegebenen Verhältnissen.
2) Zur Konstruktion gewisser häufig vorkommender regelmäßiger Vielstrahlen und Vielecke.
3) Zur Theilung und Partition symmetrischer Figuren.
4) Zur Dekoration symmetrischer Figuren durch regelmäßige Vielecke.

Ehe aber hiezu übergegangen wird, mag vorher noch die Prüfung dieser Instrumente mit ein paar Worten erwähnt werden.

A. Prüfung der Winkeldreiecke.

§. 29.

Um die Winkeldreiecke zu prüfen ist nichts nothwendig als ein Blatt weißen Papiers und ein gut gespitztes Bleistift.

1) Prüfung des rechten Winkels. (Fig. 54.)

Man legt das Winkeldreieck mit einer Fläche auf das Zeichenblatt auf, indem man es mit einer Kathete AB an ein festes Lineal EF anschließt und die freie Kathete BC auf das Papier überträgt. Hierauf dreht man das Winkeldreieck, welches jedoch mit derselben Fläche auf dem Papier liegen bleibt, schließt die andere Kathete, welche jetzt die Lage B′C′ annimmt, an das unveränderte Lineal an und trägt die nun freie Kathete in der Lage von A′B′ ganz in der Nähe von BC auf das Papier über. Zeigt es sich, daß die Geraden BC und A′B′ parallel sind, so ist damit die Genauigkeit des Instruments hinsichtlich seines rechten Winkels erprobt. Im entgegengesetzten Fall zeigt eine Convergenz dieser Geraden gegen das Anlagelineal an, daß der vorgeblich rechte Winkel zu klein, also in der That spitz ist, während eine Divergenz nach dieser Seite auf eine Abweichung zum stumpfen Winkel deutet.

2) Prüfung des halben rechten Winkels des gleichschenkligen Winkeldreiecks. (Fig. 55.)

Man legt das Instrument wie vorhin in zwei Lagen immer mit derselben Fläche auf das Zeichenblatt auf, indem man zuerst die Kathete AB anschließt und die Hypotenuse AC überträgt; hierauf schließt man die Hypotenuse an und trägt die andere Kathete in der Lage von B′C′ ganz in der Nähe von AC über. Sind nun die Richtungen AC und B′C′ parallel, so sind die spitzen Winkel des Instruments richtig.

3) Prüfung der spitzen Winkel des ungleichschenkligen Winkeldreiecks. (Fig. 56.)

Das Instrument wird ebenfalls in zwei Lagen immer mit derselben Fläche auf das Zeichenblatt aufgelegt, zuerst die Hypotenuse AC angeschlossen und die lange Kathete BC aufgetragen, dann wird die kurze Kathete in der Lage von A′B′ angeschlossen und die Hypotenuse in der

Lage von A′C′ aufgezeichnet. Die zwei Richtungen BC und A′C′ müssen, wenn die spitzen Winkel richtig sind, einen Winkel einschließen der genau dem kleinen spitzen Winkel (30°) des Instruments gleich ist.

B. Parallele und ihre Anwendung.

§. 30.

Ein Hauptgebrauch des Winkeldreiecks besteht in dem Ziehen von Parallellinien. Hiebei kommt es übrigens auf die Winkel des Dreiecks nicht an: so bald man eine Seite desselben an das Lineal angeschlossen hat um eine der freien Seiten auf das Papier überzutragen, so liefert jede Verschiebung des stets angeschlossenen Dreiecks immer wieder neue Parallelen AB || A′B′ (Fig. 57), die man also auch durch jeden gegebenen Punkt ziehen kann. Das Ziehen von Parallelen hat seinerseits selbst wieder eine häufige Anwendung in der Theilung der Geraden in gleiche Theile und in gegebenem Verhältniß. Die Sätze der Geometrie, auf welchen diese Anwendung beruht, sind:

1) Parallelen zwischen Parallelen sind einander gleich.

2) Parallelen welche auf einer Geraden gleiche Abschnitte bilden, bringen auch auf jeder anderen Schnittlinie gleiche Abschnitte hervor.

3) Beliebige Parallelen theilen überhaupt ihre Schnittlinien in proportionale Abschnitte.

§. 31.

Die hauptsächlichsten Aufgaben über die Theilung der Geraden sind:

1) Eine gegebene Gerade AB in eine gegebene Anzahl von gleichen Theilen zu theilen, etwa in 5. (Fig. 58 u. 59.)

Nachdem man auf einer beliebig durch A gezogenen Geraden AB′ die verlangte Anzahl von beliebig großen übrigens gleichen Stücken aufgetragen und den letzten Theilpunkt B′ mit B verbunden hat, zieht man durch die übrigen Theilpunkte C′, D′, E′, F′ Parallele mit BB′, so schneiden sie die Gerade AB in den Punkten C, D, E, F, welche die gewünschte Theilung in gleiche Theile enthalten (§. 30, 2).

Um den dargebotenen Raum gleichmäßig zu benützen, kann man auch durch die zwei Endpunkte A und B der gegebenen Geraden Parallele AM und BN ziehen, auf sie die aufzutragenden gleichen Stücke vertheilen, also etwa 3 auf die eine und 2 auf die andere, die Endpunkte E′ und E″

verbinden, mit E′E″ durch die übrigen Theilpunkte, C′, D′, F″ Parallele ziehen, so bewirken auch sie die gewünschte Theilung der Geraden AB.

2) Eine gegebene Gerade AB in gegebenem Verhältniß m:n etwa 3:2 harmonisch zu theilen; d. h. in diesem Verhältniß zu theilen und zu verlängern. (Fig. 60.)

Nachdem man durch die Endpunkte A und B zwei Parallele AE und NN′ in beliebiger Richtung gezogen auf der einen ein Stück

$$AE = m.AD = 3.AD,$$

auf der anderen in gleicher und entgegengesetzter Richtung

$$BF = BF' = n.AD = 2.AD$$

aufgetragen hat, so werden die Verbindungslinien EF und EF′ die gegebene AB durch ihre Schnittpunkte C und C′ harmonisch theilen, so daß sich verhält $AC:BC = AC':BC' = 3:2. = m:n$.

3) Zu drei gegebenen Geraden p, q, r die vierte Proportionallinie zu finden, das heißt, eine vierte Gerade x so zu bestimmen, daß sich verhält $p:q = r:x$. (Fig. 61.)

Nachdem man auf den Schenkeln eines beliebigen Winkels vom Scheitel A aus $AP = p$, $AQ = q$ und $AR = r$ genommen hat, ziehe man die Gerade PR und sodann QX || PR, so ist AX die verlangte vierte Proportionale. Es verhält sich nämlich nach §. 29, 3

$$AP:AQ = AR:AX$$

oder

$$p\ :q\ = r\ :x.$$

4) Es sind zwei Strecken AB und CD gegeben, von welchen die erste AB auf irgend eine Weise etwa in 5 gleiche Theile getheilt ist; man soll auch die andere Strecke CD auf dieselbe Weise theilen. (Fig. 62.)

Theilt man (nach 1) die Verbindungslinie AC zweier Endpunkte dieser Strecken in der Weise von AB, und sodann auch CD in der Weise von AC, so wird auch CD in der Weise von AB getheilt sein.

C. Regelmäßige Vielstrahlen.

§. 32.

Gerade Linien, welche durch einen Punkt gehen, bilden eine Gestalt, welche man Strahlenbüschel oder Vielstrahl heißt. Die den Vielstrahl zusammensetzenden Geraden selbst, unbegrenzt gedacht, heißen Strahlen,

der Punkt, durch welchen sie gehen, Scheitel oder Centrum. Wenn jeder Strahl durch den Scheitel hindurch geht und von demselben in zwei unendliche Aeste getheilt wird, so heißt der Vielstrahl vollständig, wenn aber jeder Strahl nur einästig und im Scheitel begrenzt ist, so heißt er Halbvielstrahl. Die Gestalt des Vielstrahls hängt von der Zahl seiner Strahlen und der Zahl der Winkel ab, den die auf einander folgenden Strahlen mit einander machen. Sind alle diese Winkel einander gleich, so heißt der Vielstrahl regelmäßig.

Der regelmäßige Zweistrahl besteht aus zwei senkrechten Geraden oder Strahlen.

Der regelmäßige Dreistrahl hat Winkel von $^{360}/_{6} = 60^{0}$.

Der regelmäßige Vierstrahl hat Winkel von $^{360}/_{8} = 45^{0}$.

Der regelmäßige Sechsstrahl hat Winkel v. $^{360}/_{12} = 30^{0}$.

Der regelmäßige Zwölfstrahl hat Winkel v. $^{360}/_{24} = 15^{0}$.

Alle diese Vielstrahlen können mit den zwei Winkeldreiecken gezeichnet werden, so wie alle Winkel, welche durch zwei beliebige Strahlen eines solchen Vielstrahls gebildet werden. Der regelmäßige Achtstrahl kann mit den Winkeldreiecken nur dann gezeichnet werden, wenn man noch einen Kreis aus seinem Scheitel beschreibt. Von Halbvielstrahlen kommt nur der Halbdreistrahl in Betracht, weil der Halbzwölfstrahl ein vollständiger Sechsstrahl, der Halbsechsstrahl ein vollständiger Dreistrahl ist.

§. 33.

Ausschließlich mit den Winkeldreiecken zu konstruirende regelmäßige Vielstrahlen:

1) Der regelmäßige Zweistrahl oder senkrechte Linien. (Fig. 64.)

Wenn man die Hypotenuse an das unbewegliche Lineal anschließt, so liefert die eine Kathete den einen Strahl BB′, und nach einiger Verschiebung des Winkeldreiecks die andere Kathete den anderen Strahl DD′. Hiebei kann der Scheitel, oder ein Punkt eines Strahls gegeben sein, das Winkeldreieck wird verschoben, bis der Strahl durch den gegebenen Punkt geht.

2) Der regelmäßige Dreistrahl. (Fig. 63.)

Hat man den ersten Strahl AA′ gezogen und dabei das Lineal an die längere Kathete des ungleichschenkligen Winkeldreiecks angelegt, so

wird das Winkeldreieck weggenommen und mit seiner oberen Fläche auf das Papier aufgelegt und wieder mit der langen Kathete an das ungeänderte Lineal angeschlossen. Die zwei anderen freien Seiten liefern die zwei anderen Strahlen BB′ und CC′, so bald man das Dreieck soweit verschiebt, daß die Strahlen durch den Scheitel O gehen.

3) Der regelmäßige Vierstrahl. (Fig. 64.)

Hat man den regelmäßigen Zweistrahl AA′, CC′ gezeichnet, so muß das Lineal senkrecht zu einem dieser Strahlen, etwa zu CC′ gestellt werden, indem man die eine Kathete an CC′ und das Lineal an die andere Kathete anlegt. Ist dieß geschehen, so schließt man jetzt das gleichschenklige Winkeldreieck mit der Hypotenuse an das Lineal an und trägt die freien Katheten auf das Papier so auf, daß die Strahlen durch den Scheitel O gehen. Diese zwei Zweistrahlen setzen den verlangten regelmäßigen Vierstrahl zusammen.

4) Der regelmäßige Sechsstrahl. (Fig. 65.)

Er entsteht aus dem regelmäßigen Zweistrahl AA′, DD′, indem man nach 2) zu AA′ noch die Strahlen CC′ und EE′ des regelmäßigen Dreistrahls, und zu DD′ noch die Strahlen BB′ und FF′ des regelmäßigen Dreistrahls hinzufügt.

Er entsteht auch aus dem regelmäßigen Dreistrahl AA′, CC′, EE′ indem man zu jedem dieser Strahlen noch einen senkrechten Strahl hinzufügt; DD′ ⊥ AA′, FF′ ⊥ CC′, BB′ ⊥ EE′. Immer sind zwei Positionen des Anlagelineals nothwendig.

5) Der regelmäßige Zwölfstrahl. (Fig. 66.)

Er entsteht aus dem regelmäßigen Dreistrahl AA′, BB′, CC′, indem man zu jedem Strahl desselben noch die drei Strahlen des regelmäßigen Vierstrahls hinzufügt, und also jeden Strahl des Dreistrahls zu einem Vierstrahl ergänzt. Zu AA′ kommen noch die Strahlen DD′, EE′, FF′ des Vierstrahls hinzu, zu BB′ die Strahlen GG′, HH′ und II′ des Vierstrahls, zu CC′ die Strahlen KK′, LL′ und MM′. Alle diese Strahlen setzen den regelmäßigen Zwölfstrahl zusammen.

§. 34.

Der regelmäßige Achtstrahl kann aus dem regelmäßigen Vierstrahl nur dadurch gezeichnet werden, daß aus dem Scheitel O (Fig. 67) ein Hilfskreis beschrieben wird. Dieser Kreis bestimmt auf dem Vierstrahl die Punkte A und A′, B und B′, C und C′, D und D′. Zieht man nun die Sehnen AD und AB′, so enthalten dieselben die Richtungen eines zweiten regelmäßigen Vierstrahls, der die Winkel des ersten halbirt und mit ihm den regelmäßigen Achtstrahl zusammensetzt. Die Strahlen dieses zweiten Vierstrahls sind HH′ || AD, EE′ || AB′, GG′ ⊥ AB′ und II′ ⊥ AD.

Alle etwa sonst noch vorkommenden regelmäßigen Vielstrahlen erfordern besondere Zirkelkonstruktionen und werden im dritten Buch behandelt werden.

D. Regelmäßige Vielecke.

§. 35.

Die regelmäßigen Vielecke sind aus regelmäßigen Vielstrahlen zusammengesetzt und können also mittelst derselben konstruirt werden.

Zieht man zu der Axe eines Ecks noch alle Diagonalen des regelmäßigen Vielecks, welche in eben diesem Eck convergiren und zudem noch einen Strahl senkrecht auf die Axe, so bilden alle diese Linien zusammen einen Eckvielstrahl des Vielecks. Jede zwei solche Eckvielstrahlen, so wie ein Eckvielstrahl und der Axenvielstrahl bestimmen das Vieleck.

1) **Alle Eckvielstrahlen eines regelmäßigen Vielecks sind unter sich und dem Axenvielstrahl desselben gleich, und wie der letztere regelmäßig.** (Fig. 68.)

Zieht man z. B. im Achteck ABCDA′B′C′D′ die Eckenaxen AA′, BB′, CC′, DD′ und die Seitenaxen EE′, FF′, GG′, HH′, welche alle im Mittelpunkt O des Vielecks convergiren, und hierauf die Diagonalen AC, AD, AB′, AC′ und MN′ ⊥ OA, so ist nach §. 4, 1: EE′ ⊥ AB, AC ⊥ BB′, AD ⊥ FF′, AA′ ⊥ CC′, AB′ ⊥ GG′, AC′ ⊥ DD′, folglich ist

Vielstrahl A, MBCDA′B′C′D′ = Vielstrahl O, AEBFCGDH,

und weil der Axenvielstrahl O regelmäßig ist, so ist es auch der Eckvielstrahl A. Dieselben Verhältnisse wiederholen sich für jedes Vieleck.

2) **Ein Vieleck ist regelmäßig, sobald zwei Eckvielstrahlen desselben regelmäßig und gleich sind.**

Es sind nämlich überhaupt zwei Vielecke ähnlich, wenn sie zwei Paare gleicher Eckvielstrahlen haben; ist also das eine dieser Vielecke regelmäßig, so ist es auch das andere.

§. 36.

Konstruktion des Quadrats oder Tetragons.

1) Ueber einer gegebenen Seite AB desselben. (Fig. 69.)

Zieht man in A zu AB zwei auf einander folgende Strahlen des regelmäßigen Vierstrahls, und sodann zwischen denselben BC || AD, und nun CD || AB, so bilden diese Linien das Quadrat ABCD mit seiner Diagonale AC.

Die ganze Konstruktion kann mit einer Position des Anlagelineals ausgeführt werden.

2) Ueber der gegebenen Diagonale AC desselben. (Fig. 69.)

Zeichnet man in A und C zu AC die beiderseits anliegenden Strahlen des regelmäßigen Vierstrahls (§. 33, 3), so bilden sie unmittelbar das verlangte Quadrat.

Auch hier genügt eine Position des Anlagelineals, senkrecht zu AC.

§. 37.

Konstruktion des Trigons.

1) Ueber einer gegebenen Seite AB desselben. (Fig. 70.)

Zieht man in A und B zu AB auf gleicher Seite je den anliegenden Strahl des regelmäßigen Dreistrahls, so bilden diese Linien das verlangte Trigon. Es ist nur eine Position des Anlagelineals nothwendig (§. 33, 2).

2) Die Lage eines Ecks A und des Mittelpunkts O gegeben. (Fig. 70.)

Zu beiden Seiten von OA sind in A die anliegenden Strahlen des Sechsstrahls und in O ein zweiter Strahl des regelmäßigen Halbdreistrahls OB zu ziehen. Fügt man noch BC ⊥ OA hinzu, so ist das Trigon vollendet.

Es sind zwei Positionen des Anlagelineals nöthig.

§. 38.

Konstruktion des Hexagons.

1) Ueber einer gegebenen Seite AB desselben. (Fig. 71.)

Man ziehe in A und B zu AB auf gleicher Seite dieser Geraden die zwei folgenden Strahlen des regelmäßigen Dreistrahls (§. 33, 2) AD und AF, BE und BC. Die inneren Strahlen AD und BE convergiren im Mittelpunt O. Zieht man nun noch zwischen den gezeichneten Strahlen durch O die Gerade CF || AB, ferner CD || BE, FE || AD, so wird auch ED || AB sein. Alle diese Linien setzen das Hexagon ABCDEF mit seinen Eckenaxen zusammen und können mit einer Position des Anlagelineals gezeichnet werden.

2) Ueber einer Eckenaxe AD desselben. (Fig. 72.)

Hat man in A zu AD beiderseits die zwei anliegenden Strahlen des regelmäßigen Sechsstrahls, und in D zu AD beiderseits je einen anliegenden Strahl des regelmäßigen Dreistrahls nach §. 33, 2 und 4 gezogen, so darf man nur noch durch die Convergenzpunkte C und E die Geraden CB und EF || AD ziehen, um das ganze Hexagon ABCDEF zu sehen.

3) Ueber einer Diagonale AC desselben. (Fig. 72.)

In A zu AC werden die Strahlen des regelmäßigen Sechsstrahls gezogen, drei AD, AE und AF auf der einen Seite, einer AB auf der anderen Seite; ist dieß geschehen, so hat man zwischen denselben noch CB || AD, CD || AF, DE || AB, FE || AD zu ziehen, um das Hexagon ABCDEF zu sehen.

§. 39.

Konstruktion des regelmäßigen Sechssterns.

1) Ueber zwei anliegenden Ecken A und B desselben. (Fig. 73.)

In A zu AB sind die folgenden vier Strahlen des regelmäßigen Sechsstrahls zu zeichnen (§. 33, 4), um zwischen denselben noch BF ⊥ AD, FC || AB, CE || BF, BD || AE und FD || AC zu ziehen. Die Trigone ACE und BDF setzen den verlangten Sechsstern zusammen.

2) Ueber einer Seite AC desselben. (Fig. 74.)

Nachdem man das Trigon ACE gezeichnet hat, bestimmt man ein Eck D des zweiten Trigons durch den Convergenzpunkt D von AD ⊥ EC, ED ⊥ AE; die Richtungen BD || AE, AB ⊥ AE liefern ein zweites Eck B,

so daß jetzt das zweite Trigon DFB gezeichnet werden kann, welches mit dem ersten den verlangten Sechsstern bildet.

3) Ueber zwei gegenüberstehenden Ecken A u. D. (Fig. 74.)

Zeichne in A und D zu AD Strahlen des regelmäßigen Sechsstrahls, in A einen diesseits AE und zwei jenseits AC und AB, in D dagegen zwei dießseits DF und DE und einen jenseits DB; ist dieß geschehen, so darf man nur noch durch die Convergenzpunkte B und E die Geraden BF und CE senkrecht zu AD ziehen um den ganzen Sechsstern ABCDEF zu sehen.

§. 40.

Konstruktion des Dodekagons über einer gegebenen Seite AB desselben.

Nachdem man zu AB in A (Fig. 75) einen regelmäßigen Zwölfstrahl A, BCDEFGHIKLM gezeichnet hat (§. 33, 5), zieht man noch zwischen seinen Strahlen BC || AD, CD || AF, DE || AH, EF || AK, GF || AM, GH || AB, HI || AD, IK || AF, KL || AH, LM || AK, so bilden diese Linien das verlangte Dodekagon.

Soll über irgend einer Diagonale das Dodekagon gezeichnet werden, so ändert sich der Gang der Konstruktion nur dadurch, daß die Strahlen des Zwölfstrahls A theilweise dießseits, theilweise jenseits der Diagonalen liegen, dagegen bleiben die Seiten des Dodekagons denselben abwechselnden Strahlen des regelmäßigen Vielstrahls parallel.

§. 41.

Konstruktion der regelmäßigen Zwölfsterne.

1) Der hexagonische Zwölfstern über dessen Seite AB.

Der hexagonische Zwölfstern besteht aus zwei sich durchdringenden Hexagonen. Das erste Hexagon ABCDEF (Fig. 76) kann nach §. 38, 1 gezeichnet werden. Ein Eck G des zweiten Hexagons findet sich dadurch, daß man zur Diagonale AC in A den anliegenden Strahl AG des regelmäßigen Vierstrahls zieht und seinen Convergenzpunkt G mit der zur Seite AB gehörigen Seitenaxe KG sucht. Nun wird zur Halbaxe OG das Hexagon GHIKLM gezeichnet, indem man zuerst den Dreistrahl KG, HL, MI zeichnet und die Seiten des Hexagons denselben parallel legt.

2) Der tetragonische Zwölfstern über einer Seite AB desselben. (Fig. 77.)

Er besteht aus drei Tetragonen, von welchen das erste ABCD nach

nach §. 36, 1 gezeichnet wird. Nun ergänze man den regelmäßigen Zweistrahl AC, BD zum regelmäßigen Sechsstrahl O, AEIBFK, so werden auf ihm die Ecken der noch fehlenden Tetragonen liegen. BE || OK convergirt mit dem Strahl OE in einem Eck E des zweiten Tetragons EFGH, welches nun leicht gezeichnet werden kann. Ebenso findet man durch AI || FH das Eck I des dritten Tetragons IKLM, welches wie das zweite gezeichnet wird.

3) Der trigonische Zwölfstern über einer Seite AB desselben. (Fig. 78.)

Er besteht aus 4 Trigonen; das erste ABC wird nach §. 37, 1 gezeichnet, der zugehörige Dreistrahl des Centrums wird durch die Richtungen AE⊥BC, BF⊥AC, CD⊥AB gebildet; dieser zum regelmäßigen Sechsstrahl ergänzt liefert noch die fehlenden Axen GL, KI, MH des regelmäßigen Sechsstrahls der Eckenaxen. Um nun auf diesem die Ecken der übrigen Trigone zu bekommen, müssen zu AB in B die folgenden drei Strahlen des regelmäßigen Zwölfstrahls gezeichnet werden BK, BD und BG, welche auf den Strahlen des Sechsstrahls O die verlangten Ecken G, D, K bestimmen. Die Trigone GHI, DEF, KLM nach 37, 2 gezeichnet, bilden mit ABC den verlangten trigonischen Zwölfstrahl.

4) Der dodekagonische Zwölfstern über einer Axe AG desselben. (Fig. 79.)

Man kann etwa folgenden Weg einschlagen: Man zeichnet zuerst, über AG als Axe, ein Quadrat ADGK (§. 36, 2) und ergänzt den Zweistrahl seiner Axen AG, DK zum regelmäßigen Sechsstrahl CI, BH, FM, EL. Zeichnet man nun in den 4 Ecken A, D, G, K des Quadrats zu den Strahlen AG und DK die anliegenden Strahlen der regelmäßigen Zwölfstrahlen, so bilden sie 8 Seiten des gesuchten Zwölfsterns, welche mit den Axen des Sechsstrahls O in den Ecken A, B, C, D... desselben convergiren, so daß auch die noch fehlenden 4 Seiten gezogen werden können.

§. 42.

Konstruktion des Oktagons und regelmäßigen Achtsterns.

1) Das Oktagon über einer Seite AB desselben. (Fig. 80.)

Es ist die Benützung des Zirkels unvermeidlich, wobei man etwa folgenden Weg einschlagen kann. Nachdem man über AB ein Quadrat ABKL mit seinen Ecken und Seitenaxen gezeichnet hat, beschreibe man

den unbeschriebenen Kreis, welcher die zu AB senkrechte Axe in O schneidet, so ist O der Mittelpunkt des gesuchten Oktagons; zieht man also durch O die Richtungen AE und BF, und senkrecht zu denselben die Richtungen CG und DH, so bilden sie den regelmäßigen Vierstrahl der Eckenaxen. Zieht man nun zwischen denselben BC || AK, CD || AL, DE || BG, EF || AB, FG || AD, GH || AL, AH || BG, so bilden diese Geraden die Seiten des gesuchten Oktagons ABCDEFGH.

2) Der tetragonische Achtstern über einer Seite AB desselben. (Fig. 81.)

Derselbe besteht aus zwei Tetragonen, von welchen das eine ABCD nach §. 36, 1 gezeichnet wird. Nimmt man nun auf den Seitenaxen OF = OG = OA, so kann das zweite Tetragon EFGH nach §. 36, 1 gezeichnet werden.

3) Der oktagonische Achtstern über einer Seite AB desselben. (Fig. 82.)

Man kann etwa folgenden Weg einschlagen. Ueber AB als Diagonale wird nach §. 36, 2 ein Quadrat AKBL gezeichnet, ferner AH = AB genommen, hierauf wird das Quadrat KRST so gezeichnet, daß die Gegenseiten RS und KT durch A und H gehen. Die Ecken des Achtsterns liegen auf dem Umfang dieses Quadrats, und die Seiten desselben sind mit AB und AH parallel oder auf diesen Linien senkrecht.

E. Division und Partition.

§. 43.

Die Symmetrie einer Gestalt beruht darauf, daß zwei oder mehrere congruente Systeme zu einem Ganzen vereinigt sind. Diese congruenten Systeme werden um so mehr bemerklich, je auffallender die Gestalten der einzelnen Systeme sind. Die Ornamentik beruht im Wesentlichen darauf, die in der symmetrischen Gestalt vereinigten congruenten Systeme auf angenehme Weise fühlbar und merklich zu machen, und sie also zu dem Ende mit angemessenen Punkten, Linien, und selbständigen Gestalten zu erfüllen.

Unter den Linien müssen diejenigen unterschieden werden, welche mit den Axen parallel laufen, und dieselben in eine Anzahl gleicher Theile theilen. Solche Linien sind geeignet, das Vorhandensein der Axen bemerklich zu machen, auch wenn dieselben nicht gezeichnet sind. Die

Erfüllung der Fläche einer symmetrischen Gestalt mit solchen Linien heißen wir Division. Je nachdem die Axen, und dem gemäß auch die Seiten des regelmäßigen Vielecks in 2, 3 ꝛc. Theile getheilt werden, entsteht eine Zweitheilung, Dreitheilung ꝛc.

Diese Theilung kann zwar nach den Regeln des §. 31 jederzeit ausgeführt werden, allein es bietet die Symmetrie der Gestalt gewöhnlich Mittel dar, welche das Geschäft abkürzen und welche der Zeichner kennen muß. Wir werden also in den zwei folgenden Paragraphen die Division des Quadrats und des Hexagon näher betrachten.

§. 44.

Division des Quadrats nach den Richtungen der Seitenaxen* und Eckenaxen.

1) Die Zweitheilung des Quadrats nach den Richtungen der Seitenaxen wird durch die Seitenaxen selbst gebildet. (Fig. 83.)

Nach den Eckenaxen durch Gerade EG, GF, FH, HE, welche die Endpunkte der Seitenaxen verbinden.

2) Die Viertheilung des Quadrats. (Fig. 83.)

Die Richtungen der Zweitheilung nach den Eckenaxen convergiren mit diesen Axen in den Punkten m, n, r, s, durch welche auch die Richtungen der Viertheilung gehen, so daß man durch diese Convergenzpunkte zu den Richtungen der Viertheilung übergehen kann.

3) Die Dreitheilung des Quadrats. (Fig. 84.)

Auch die Dreitheilung kann aus der Zweitheilung bestimmt werden: das Ende A einer Eckenaxe mit dem Ende H einer Seitenaxe verbunden liefert eine Richtung AH, welche der anderen Eckenaxe BD in einem Punkt m der Dreitheilung convergirt. Durch jeden dieser Punkte m, n, r, s kann man also zu der Dreitheilung des Quadrats übergehen.

4) Die Sechstheilung des Quadrats. (Fig. 84.)

Sie ist eine Combination von der Dreitheilung und Zweitheilung und kann gezeichnet werden, wenn man außer den Punkten m, n, r, s der Dreitheilung auch noch die Punkte p und q der Sechstheilung berücksich-

* Die Division nach den Richtungen der Eckenaxen sind in den Figurentafeln nicht gezeichnet, der Lehrer wird aber nicht versäumen sie von seinen Schülern ausführen zu lassen.

tigt, in welchen die Richtungen mr und sn der Dreitheilung von den Hilfslinien AH und CG geschnitten werden.

Anm. Wie man von der Zweitheilung auf die Drei- und Viertheilung übergeht, so kann man auch von der Viertheilung auf die Fünf- und Siebentheilung übergehen.

§. 45.

Division des Hexagons nach den Richtungen der Eckenaxen und Seitenaxen.*

1) Die Zweitheilung des Hexagons. (Fig. 85.)

Sie wird durch die Seitenaxen selbst ausgeführt, sowie durch zwei Trigone GHI und G'H'I', welche die Endpunkte der Seitenaxen mit einander verbinden. Diese letzteren Richtungen der Zweitheilung können auch ohne Hilfe der Seitenaxen gefunden werden, weil sie mit den Diagonalen wie DF in Punkten wie p der Eckenaxen convergiren.

2) Die Dreitheilung des Hexagons. (Fig. 86.)

Sie wird in der Richtung der Eckenaxen durch Linien bewirkt, welche mit den Diagonalen des Hexagons in denselben Punkten der Seitenaxen convergiren. Es genügt, den Convergenzpunkt p zweier Diagonalen CE, DF zu zeichnen, um die ganze Dreitheilung nach den Richtungen der Eckenaxen auszuführen. Um die Dreitheilung nach der Richtung der Seitenaxen zu bekommen, darf man nur vorher zwei Punkte I und K derselben nach dem Vorausgehenden bestimmen.

3) Die Viertheilung des Hexagons. (Fig. 85.)

Sie besteht aus Richtungen der Zweitheilung und aus anderen Richtungen, welche mit den Diagonalen des Sechsecks und den Richtungen der Zweitheilung in denselben Punkten m, n, r, s convergiren. Vermittelst dieser Punkte und der Punkte p und q, welche der Zweitheilung angehören, kann also die Viertheilung in der Richtung der Eckenaxen ausgeführt werden. Zwei Punkte K und T der Viertheilung auf einer Seite nach dem Vorausgehenden bestimmt, reichen zur Viertheilung in der Richtung der Seitenaxen aus.

* Der Lehrer wird nicht versäumen, auch hier die Division nach den Richtungen der Seitenaxen zeichnen zu lassen.

§. 46.

Durch die Division wird die ganze Fläche einer symmetrischen Gestalt mit mehreren Reihen von parallelen Geraden überdeckt, und dadurch in eine große Zahl von symmetrischen Theilgestalten abgetheilt, in welchen selbst wieder die Symmetrie des Ganzen zum Vorschein kommt. Uebrigens sind weder diese Linien noch ihre Convergenzpunkte hinsichtlich der Symmetrie gleichwerthig. Diese Eigenschaft kommt vielmehr nur denjenigen unter ihnen zu, welche einander zugeordnet sind. Nimmt man nun von den Richtungen einer Division nur diejenigen heraus, welche einander zugeordnet sind, oder welche zugeordnete Punkte mit einander verbinden, und löscht dafür alle anderen dieser Zuordnung nicht angehörigen Elemente aus, so behält man ein Stabwerk von Linien übrig, welches die Fläche der ganzen Gestalt zwar nicht in unterschiedene gleiche Theile, dagegen aber in partieenweise gleiche und einander zugeordnete Theile zerlegt, die in ihrer Anordnung schon die eigentlichen Elemente der Symmetrie; nämlich die Axen und den Mittelpunkt, auch wenn sie selbst nicht gezeichnet sind, fühlen lassen. Die Zeichnung eines solchen Stabwerks, welches sich aus der Division entwickelt, heißen wir zum Unterschied derselben Partition.

Die Theilgestalten der Partition sind theils selbst wieder regelmäßig und der gegebenen ganzen symmetrischen Gestalt ähnlich, oder sie gehören einem niedereren Grad der Symmetrie an, immer aber erscheinen sie durch ihre Anordnung als symmetrische Glieder der Hauptgestalt und machen die Harmonie anschaulich, welche das symmetrische System, dem sie angehören, in sich birgt.

Die Zweitheilung allein erlaubt die in der Partition gewonnene Entwicklung der Symmetrie nicht, weil bereits alle Richtungen einer Zweitheilung einander symmetrisch zugeordnet sind. Die Division der Zweitheilung ist daher bereits eine Partition. Erst bei einer Division von mehr als zwei Theilen tritt der Unterschied zwischen der Division und Partition an den Tag. Wir werden uns übrigens bei der Partition, wie es bei der Division geschehen ist, auf die Drei-, Vier- und Sechstheilung beschränken. Uebrigens kann man auch die Partition der Zwei-, Drei-, Vier- und Sechstheilung nach Belieben mit einander verbinden. Um die Klarheit zu erhöhen unterbricht man alsdann auch häufig die Richtungen

der Partition, um gewisse sich ergebende Theilgestalten, die man erhalten möchte, nicht zu zerschneiden. Dieß thut man namentlich, wenn man Partitionen verschiedenen Ranges mit einander verbindet.

§. 47.

Die Partition des Quadrats.

1) Das Stabwerk der Viertheilung (Fig. 87) in der Richtung der Seitenaxen.

Dieses wird gebildet durch die äußeren Theilungslinien; es zerlegt das Hauptquadrat ABCD in vier kleinere Quadrate an den Ecken, ein größeres Quadrat in der Mitte, und 4 Rechtecke an den Seiten, welche den Raum zwischen den Quadraten füllen.

2) Das Stabwerk der Viertheilung in der Richtung der Eckenaxen (Fig. 88).

Dieses wird gebildet durch die äußeren Theilpunkte und ihre Verbindungslinien; es zerlegt das Hauptquadrat ABCD in 5 kleine Quadrate, in Form eines Kreuzes gruppirt, und in vier kleinere Dreiecke an den Ecken und 4 größere an den Seiten.

3) Das Stabwerk der Viertheilung in der Richtung der Eckenaxen (Fig. 89).

Dieses ist mit den Stabwerken der Zweitheilung beider Richtungen kombinirt, jedoch mit Unterbrechungen ausgeführt. Die Haupttheilgestalten sind vier einarige Sechsecke in Form eines Kreuzes gruppirt, und 4 kleine Quadrate zwischen den Aesten des Kreuzes.

4) Ein Stabwerk der Sechstheilung in der Richtung der Seitenaxen (Fig. 90).

In diesem sind die ungleichwerthigen Richtungen ungleich und die gleichwerthigen dagegen gleichartig behandelt.

5) Ein Stabwerk der Sechstheilung in der Richtung der Eckenaxen (Fig. 91).

Auch hier sind die ungleichwerthigen Richtungen ungleich und die gleichwerthigen dagegen gleichartig behandelt.

§. 48.

Die Partition des Hexagons ABCDEF.

1) Das Stabwerk der Diagonalen in Kombination mit den Seitenaxen (Fig. 92).

Dieses bildet einen sechsgliederigen Stern, zusammengesetzt aus sechs Rhomben, welche die einspringenden Ecken a, b, c, d, e, f mit dem Mittelpunkt O verbinden.

2) Das Stabwerk der Zweitheilung in der Richtung der Eckenaxen in Kombination mit den Eckenaxen (Fig. 93).

Dieses bildet ebenfalls einen sechsgliedrigen aus Rhomben zusammengesetzten Stern, welcher die Mitten a, b, c, d, e, f der Seiten mit dem Mittelpunkt O des Hexagons verbindet.

3) Das Stabwerk der Dreitheilung in der Richtung der Eckenaxen (Fig. 94).

Dieses wird gebildet durch die äußeren Theilungslinien, wodurch in der Mitte ein Hexagon abcdef, in den Ecken 6 Rhomben, an den Seiten 6 einaxige Vierecke entstehen.

4) Das Stabwerk der Dreitheilung in der Richtung der Eckenaxen (Fig. 95).

Dieses wird gebildet durch die inneren Theilungslinien, wodurch die Fläche des Hexagon in 7 kleinere aber gleiche Hexagone und 12 Trigone zerlegt wird, welche zwischen jenen liegen.

5) Das Stabwerk der Dreitheilung in der Richtung der Eckenaxen in Kombination mit den Eckenaxen (Fig. 96).

Bei diesem sind die inneren und äußeren Theilungslinien verschieden behandelt, und alle Richtungen treten mit solchen Unterbrechungen auf, daß 6 gleiche Hexagone zum Vorschein kommen, welche ein siebentes gleiches Hexagon blumenblätterig umgeben, und es mit den Seiten des Hexagons verbinden.

6) Ein Stabwerk in der Richtung der Seitenaxen in Kombination mit den Seitenaxen (Fig. 97).

Dieses im Uebrigen ganz ähnlich dem Stabwerk Nro. 5, gehört eigentlich der Dekoration an. Von den hexagonalen Theilgestalten ist

jedes äußere Hexagon in das Deltoid einbeschrieben, welches zwei anliegende Seitenaxen hervorbringen (vergleiche §. 52, 5).

F. Dekoration.

§. 49.

Durch die Partition wird die Fläche einer symmetrischen Gestalt in eine Anzahl verschiedener Theilgestalten, symmetrisch gruppirt, zerlegt. Diese Theilgestalten, obgleich verschiedenen Stufen der symmetrischen Entwicklung angehörig, erscheinen doch gleichartig, weil ihre besondere Gestalt den Charakter zufälliger Bildung an sich trägt und in Hinsicht ihrer Gruppirung alle dem gleichen Gesetz unterworfen sind. Wenn man nun die Theilgestalten der Partition dieses Charakters der Einerleiheit und Abhängigkeit enthebt und einer oder mehreren Gruppen derselben eine selbstständige Entwicklung ihrer Gestaltung einräumt, so gewinnt das ganze System dadurch eine Ausbildung, welche mit dem Namen der **Dekoration** bezeichnet wird.

Die selbstständige Gestaltsentwicklung, welche man den Theilgestalten einer Gruppe der Partition angedeihen läßt, hat aber auch noch ihre Stufen, denn sie kann selbst wieder abhängig oder unabhängig sein. Abhängig ist sie dann, wenn sie sich selbst an das System der Symmetrie gebunden hält, dem die ganze Gestalt angehört, wenn z. B. die Theilgestalten des tetragonalen Systems ihre Entwicklung innerhalb der Symmetrie dieses Systems suchen und selbst nur durch Gestaltungen des tetragonalen Systems ausgezeichnet werden, so daß die Gestaltsentwicklung des Systems, welche an der einfachen Hauptgestalt nicht sichtbar ist, hier an den Gliedern derselben zum Vorschein kommt. Unabhängig oder frei ist die Dekoration, wenn die Entwicklung der Theilgestalten einer oder mehrerer Gruppen ganz unabhängig von der Symmetrie der Hauptgestalt ist, wenn z. B. die Theilgestalten der tetragonalen Hauptgestalt durch eine Gestalt des trigonalen, hexagonalen oder irgend eines anderen Systems ersetzt werden.

§. 50.

Die Werthlegung auf die Ausbildung des einzelnen Gliedes einer symmetrischen Gestalt, wie sie in der Dekoration statt findet, führt noch zu einer anderen Entwicklung von allgemeinerem Charakter, die sogar auf

die Partition Einfluß hat. Es schließt nämlich jede Symmetrie höheren Ranges viele symmetrische Systeme niederen Ranges in sich. Das uncentrische regelmäßige System ist zusammengesetzt aus mehreren einarigen Systemen, das centrische regelmäßige System vereinigt mehrere zweiarige Systeme, das hexagonale System besteht aus 3 zweiarigen Systemen, so wie aus 2 dreiarigen Systemen, der Kreis endlich ist eine Vereinigung von allen regelmäßigen und symmetrischen Systemen. Bei der Dekoration und selbst schon bei der Partition eines symmetrischen Systems höheren Ranges kann man eines der niederen Systeme, welche es einschließt, bevorzugen, und diejenigen Linien einzeichnen, welche in ihm einander zugeordnet sind, während man die anderen Linien weg läßt, welche im höheren System der gegebenen Hauptgestalt auch noch zu dieser Gruppe gehören würden. Hiedurch erhält man eine specifische Partition. So hat z. B. das System des Hexagons (Fig. 98) die Eckenaxen AD, BE und CF, es schließt aber auch zwei trigonale Systeme ein, von welchen das eine die Halbaxen OA, OC und OE hat, während das andere die Halbaxen OB, OD und OF hat. Zieht man nun die Diagonale AC, so ist sie im ersten trigonalen System den Diagonalen CE und AE zugeordnet. Das Trigon ACE gehört diesem System an und bildet also ein trigonales Stabwerk im hexagonalen System. Ebenso ist in Fig. 99 die Gerade GH, welche AB halbirt und mit der Axe AO parallel ist, im trigonalen System ACE den Linien GI, LM, LN, RS und RT zugeordnet. Diese Linien bilden also ein Stabwerk, welches drei Hexagone AO, CO und EO hervorbringt. In der specifischen Partition läßt das höhere System das niedere System erkennen, welches es in sich schließt, und zeigt somit einen nicht geahnten Reichthum, welcher das Auge des Beschauers angenehm berührt. Diese Ausschmückung der Theilgestalten niederen Ranges bildet ein weiteres oft sehr überraschendes Mittel der Ausschmückung einer gegebenen symmetrischen Gestalt.

§. 51.

Einige Beispiele der abhängigen Dekoration.

1) Dekoration des Hexagons von trigonalem Charakter, (Fig. 100).

Die 3 Hexagone, welche in die Rhomben OABC, OCDE und OEFA der Halbaxen AO, OC, OE nach dem Gesetz der trigonalen Symmetrie

einbeschrieben sind, sind zu Sechssternen entwickelt, und mit Rhomben umgeben, welche die einwärts springenden Winkel der Sechssterne ausfüllen.

2) Dekoration des Hexagons von zweiaxigem Charakter. (Fig. 101).

Die Seitenaxe GK theilt das Hexagon in zwei Fünfecke GBCDK und GAFEK von zweiaxiger Gestalt; über den Halbaxen OC und OF, welche in der Richtung der zweiten Axe des zweiaxigen Systems liegen, sind Hexagone so eingezeichnet, daß OC und OF als ihre Eckenaxen betrachtet sind. Diese 2 Hexagone sind zu regelmäßigen Sechssternen entwickelt, und mit Ausfüllungsrhomben, einem Laubwerk ähnlich, umgeben.

3) Dekoration eines Dodekagons innerhalb seines Systems, entwickelt nach der Rosette in der neuen Synagoge zu Stuttgart. (Fig. 102.)

Im Umfang erscheinen die zwei Hexagone des hexagonischen Zwölfsterns ABCDEF und GHIKLM, und zwischen denselben die Ecken des trigonischen Zwölfsterns in Form von kleinen Trigonen, deren innere Seite jedoch nicht ausgezogen, sondern als Ausgangspunkte von neuen, das innere Feld durchlaufenden Geraden offen gelassen ist. Eine solche Gerade verbindet jedoch nicht diese Trigonecken mit den Trigonecken der gegenüberstehenden Hexagonseite, sondern vielmehr mit denjenigen an der Gegenseite anliegenden Hexagonseiten. Die Gruppe dieser 24 einander zugeordneten inneren Geraden sind jedoch nicht ganz ausgezogen, sondern nur bis an die Punkte a, b, c, d, e, f, g, h, i, k, l, m, wo sie sich rechtwinklig durchdringen und einen trigonischen Zwölfstern bilden. Die einspringenden rechtwinkligen Ecken dieses Zwölfsterns sind durch die Eckenaxen des Systems mit einander verbunden, übrigens auch blos zur Hälfte ausgezogen, wo sie auf einem den Mittelpunkt umgebenden kleinen Kreis aufsitzen.

4) Tetragonale Dekoration eines Dodekagons. (Fig. 103).

Im Umfang des Dodekagons erscheinen die Seiten des tetragonischen Zwölfsterns. Unter diesen sind vier Ecken, A, D, G, K, welche zwei senkrechten Axen angehören, besonders ausgezeichnet dadurch, daß die anliegenden einspringenden Ecken den Axen parallel mit einander verbunden sind; dabei sind die Strahlen ihrer Durchdringung nicht ausgezogen, damit das rechtwinklige Kreuz, welches sie bilden, um so deutlicher

gesehen werde. In den übrigen Ecken sind sowohl die Eckenaxen als auch die Seitenaxen gezogen.

5) Trigonale Dekoration des Hexagons. (Fig. 104.)

Von den Richtungen der Sechstheilung im Sinne der Eckenaxen sind von den innersten Theilungslinien diejenigen ausgezogen, welche zum trigonalen System ACE gehören. Sie bilden eine Art von Gottesauge mit einem Hexagon im Centrum, in den rhombenförmigen Feldern, welche die Aeste dieser Gestalt trennen, sind Trigone def, ghi, klm beschrieben, welche ein Eck nach Innen kehren.

6) Noch eine trigonale Dekoration des Hexagons. (Fig. 105.)

Eine Gruppe von 6 trigonal einander zugeordneten Richtungen der Viertheilung, welche aber nicht den zugehörigen Axen parallel sind, sondern in den gegenüber stehenden Ecken B, D, F des Hexagons convergiren, bilden ein Gottesauge ACE mit einem trigonalen Sechsseit in der Mitte. Die deltoidischen Zwischenfelder sind mit Trigonen ausgefüllt, deren Spitzen nach außen gekehrt sind.

§. 52.

Die freie Dekoration führt Konstruktionen mit sich, die dem Zeichner, wenn er nicht straucheln soll, geläufig sein müssen, und die dem Wesentlichen nach an einzelnen Aufgaben gezeigt werden sollen. Es handelt sich hiebei um ein regelmäßiges Vieleck, das in ein gegebenes Vieleck einbeschrieben werden soll.

1) In ein gegebenes Quadrat ABCD ein Trigon so einzubeschreiben, daß ein Eck des Trigons mit einem Eck A des Quadrats zusammenfällt. (Fig. 106.)

Zieht man in A zu AC die anliegenden Strahlen AE und AF des regelmäßigen Sechsstrahls, und verbindet die Schnittpunkte E und F, so ist AEF das verlangte Trigon.

2) In ein gegebenes Quadrat ABCD ein Hexagon so zu beschreiben, daß die Ecken des letzteren auf den Seiten und einer Diagonale des ersteren liegen. (Fig. 107.)

Zieht man im Mittelpunkt O zu der Diagonale BD, auf welcher 2 Ecken des Hexagons liegen sollen, die übrigen Strahlen des regelmäßigen Dreistrahls, so bezeichnen sie auf dem Umfang des Quadrats die Lage der Hexagonecken, welches also sofort vollendet werden kann.

3) In einen gegebenen Rhombus ABCD ein Quadrat zu beschreiben. (Fig. 108).

Zieht man zu den Diagonalen AC und BD noch die fehlenden Strahlen EG und FH des regelmäßigen Vierstrahls, so bezeichnen sie auf dem Umfang des Rhombus die Ecken des inbeschriebenen Quadrats EFGH.

4) In ein beliebiges Dreieck ABC ein Quadrat so einzubeschreiben, daß eine Seite desselben mit AB zusammenfalle und die andern Ecken in die Seiten AC und BC zu liegen kommen. (Fig. 109.) *

Man beschreibt über AB, oder um Raum zu ersparen, über einer mit AB parallelen Richtung D′E′ ein Quadrat D′E′F′G′ und zieht durch G′ und F′ die Strahlen CG und CF. Zeichnet man nun über GF ein Quadrat, so wird es die gewünschte Lage einnehmen. Weil nämlich die Quadrate DEFG und D′E′F′G′ ähnlich sind und parallele Seiten haben, so convergiren GG′ und FF′ mit EE′ und DD′ in einem und demselben Punkt C, die Ecken E und D liegen also wie E′ und D′ auf den Seiten AC und BC des Dreiecks ABC.

5) In ein gegebenes Deltoid ABCD ein Quadrat zu beschreiben. (Fig. 110.)

Nachdem man wie in Nro. 4 zwischen CB und CD die Richtung F′G′ || BD gezogen und über G′F′ ein Quadrat E′F′G′H′ gezeichnet hat, bestimme man durch die Strahlen CE′ und CH′ die Punkte E und H auf AB und AD, und beschreibe über EH das Quadrat EFGH, so wird dasselbe die gewünschte Lage einehmen.

§. 53.

Einige Beispiele von freier Dekoration.

1) Das Quadrat ABCD dekorirt durch 4 Trigone, Oef, Ogh ꝛc. (Fig. 111.)

Diese sind so in dasselbe beschrieben, daß ihre Spitzen im Mittelpunkt O des Quadrats coincidiren.

---

* Die Begründung dieser und der folgenden Konstruktion setzt Kenntnisse voraus, welche im vierten Buch §. 79 behandelt sind.

2) Das Quadrat ABCD dekorirt durch 4 Trigone,

die mit dem einen Eck in den Ecken des Quadrats liegen und mit den gegenüberstehenden Seiten selbst wieder ein Quadrat efgh bilden. (Fig. 112.)

3) Das Quadrat ABCD dekorirt mit 4 Hexagonen,

deren innere Seiten ein Quadrat pqrs bilden, während ihre gegenüber stehenden Ecken ef, gh, ik, lm auf dem Umfang des Quadrats liegen. (Fig. 113.)

4) Das Quadrat, dekorirt mit 4 Hexagonen,

von welchen jedes mit zwei einander gegenüberstehenden Ecken auf einer Diagonale des Quadrats liegt, während zwei andere Ecken auf dem Umfang des Quadrats liegen, und wieder zwei andere Ecken mit den Ecken der anliegenden Hexagonen in den Punkten e, f, g, h der Seitenaxen coincidiren, und ein sternförmiges tetragonales Achtseit bilden. (Fig. 114.)

5) Das Quadrat ABCD dekorirt durch ein Octagon efghiklm,

dessen Mittelpunkt mit demjenigen des Quadrats coincidirt, und von welchem 4 Seiten, mit den Quadratseiten parallel, und durch 4 kleinere Quadrate von denselben getrennt sind. (Fig. 115.)

6) Das Quadrat ABCD mit einem Octagon efghiklm und 4 kleineren Quadraten.

Dieses ist wie in Nro. 5 dekorirt, nur mit dem Unterschied, daß die inbeschriebene zusammengesetzte Gestalt eine Diagonalstellung einnimmt. (Fig. 116.)

7) Das Quadrat ABCD dekorirt durch einen central inbeschriebenen tetragonischen Zwölfstern efghiklmnopq. (Fig. 117.)

Acht Ecken dieses Sterns liegen auf dem Umfang des Quadrats. Um den Mittelpunkt erscheint ein trigonischer Zwölfstern, dessen Seitenrichtungen mit den Seiten des äußeren Zwölfsterns Quadrate bilden, die in den Vielstrahl der Eckenaxen so einbeschrieben sind, daß die Diagonale eines jeden Quadrats wie ldsc mit einer Eckenaxe coincidirt, und die anderen zwei Ecken auf den anliegenden Eckenaxen liegen. Zwischen den einspringenden Ecken des äußeren Zwölfsterns und den auswärts springenden Ecken des inneren Zwölfsterns erscheinen die Seitenaxen des dodekagonalen Systems des äußeren Sterns.

8) Das Quadrat ABCD durch das Stabwerk §. 47, 1 abgetheilt, ist in den quadratischen Feldern der Partition auf freie Weise dekorirt. (Fig. 118.)

Die äußeren kleineren Quadrate an den Ecken sind durch Trigone nach Nro. 1 ausgefüllt. Das größere innere Quadrat ist zuerst durch Trigone in umgekehrter Stellung nach Nro. 2 dekorirt; das Quadrat, welches hiebei in der Mitte übrig bleibt und an Größe den Quadraten an den Ecken der Hauptgestalt ziemlich gleich ist, ist selbst wieder wie jene durch Trigone in der Stellung Nro 1 dekorirt.

9) Das Hexagon ABCDEF dekorirt durch Quadrate, deren jedes zwei gegenüberstehende Ecken auf einer Eckenaxe so liegen hat, daß ein Eck des Quadrats mit einem Eck des Hexagons coincidirt. Die zwei anderen anliegenden Ecken coincidiren in Punkten der anliegenden Seitenaxen. (Fig. 119.)

10) Das Dodekagon ABCDEFGHIKLM dekorirt durch den zugehörigen tetragonischen Zwölfstern, und durch einen tetragonischen Achtstern pqrstuvw (Fig. 120.),

von welchem 4 Ecken auf dem Umfang eines der 3 Quadrate ADGK u. s. w. liegen, welche den tetragonischen Zwölfstern zusammensetzen. Die Mitte ist durch aneinandergereihte Quadrate dekorirt, ähnlich denjenigen von Nro. 9. Diese Quadrate gehören einem tetragonischen Zwölfstern an, der in das Quadrat abcd inbeschrieben ist, welches seinerseits selbst wieder in das Quadrat prtv inbeschrieben ist.

Drittes Buch.

Vom Gebrauch des Zirkels.

---

§. 54.

Der Zirkel ist das wichtigste Instrument des Zeichners. Er genügt, wie der italienische Mathematiker Mascheroni gezeigt hat, um für sich allein schon alle geometrischen Aufgaben zu lösen, und bietet in Verbindung mit dem Lineal häufig die bequemsten Verfahrungsarten dar. Die Konstruktionen mit dem Zirkel gewähren die größte Genauigkeit, wenn man Sorge hat beim Ziehen der Kreislinien das Einsetzen des einen Zirkelfußes im Mittelpunkt des Kreises mit Schärfe zu behandeln. Der Zeichner sollte also jedenfalls mit den wichtigsten Zirkelkonstruktionen bekannt sein und namentlich wissen, wie die Unterbrechungen durch das Lineal, wenn er einmal den Zirkel in der Hand hat, vermieden werden können. Für diesen Fall sind jedenfalls die Entdeckungen des italienischen Geometers von praktischem Werth. Es wird daher in den folgenden dem Zeichner nöthigen Konstruktionsmethoden auf Mascheroni's Entdeckungen die gebührende Rücksicht genommen werden.

A. Elementarkonstructionen.

§. 55.

Der Zirkel ist hauptsächlich zum Zeichnen von Winkeln geeignet, weil der aus seinem Scheitel zwischen seinen Schenkeln gezogene Bogen ein Maaß seiner Größe ist. Es folgen zunächst die 4 Elementaraufgaben:

1) Einen gegebenen Winkel ABC in B' an eine gegebene Richtung A'B' abzutragen. (Fig. 121.)

Nachdem man aus B zwischen den Schenkeln des gegebenen Winkels den Bogen DE und aus B′ mit demselben Halbmesser einen Hilfsbogen beschrieben hat, der auf A′B′ den Punkt D′ bezeichnet, so mache man D′E′ = DE und ziehe durch E′ die Gerade B′C′, so ist < A′B′C′ = < ABC.

2) Einen gegebenen Winkel ABC zu vervielfältigen. (Fig. 122.)

Wenn man auf einem aus B beschriebenen und in A′ und E′ schneidenden Kreis E′F′ = F′C′ = A′E′ nimmt, so ist < A′B′E′ = < A′B′F′ = < A′B′C′.

3) Einen Winkel ABE zu halbiren. (Fig. 122.)

Nachdem man aus B zwischen den Schenkeln des gegebenen Winkels den Bogen A′E′ beschrieben und noch aus A′ und E′ mit beliebigem aber gleichem Halbmesser zwei Bögen gezogen hat, die sich in D schneiden um BD zu ziehen, so wird die Gerade BD den Winkel ABE halbiren.

4) Winkel ABC in mehrere gleiche Theile zu theilen.

Man benützt am Besten folgendes Versuchsverfahren. Nachdem man nämlich (Fig. 122) aus B den Bogen A′C′ zwischen den Schenkeln des gegebenen Winkels gezogen hat, versucht man mit einer nach dem Augenmaß bestimmten Oeffnung des Stockzirkels eine Theilung des Bogens A′C′. Gewöhnlich geht dieselbe nicht in gewünschter Zahl in die ganze Ausdehnung des Bogens A′C′ auf, sondern es fehlt noch ein kleiner Bruchtheil. Nun erweitert oder verengt man die Zirkelöffnung nach Bedürfniß um einen gewissen Theil, den man nach Schätzung so nimmt, daß er im Ueberschuß ebenso oft enthalten ist als die Theilungszahl des gegebenen Winkel anzeigt. Mit dieser so veränderten Zirkelöffnung versucht man die Theilung des Bogens A′C′ von Neuem. Man wird bald so viel Uebung erlangen um schon mit dem zweiten, höchstens mit dem dritten Versuch, zum Ziele zu gelangen. Werden durch die so bestimmten Theilpunkte E′, F′ des Bogens A′C′ die Richtungen BE, BF.. gezogen, so ist die Aufgabe gelöst.

§. 56.

Die Konstruktion von Parallellinien geschieht am besten mittelst der Winkeldreiecke, allein der Zeichner muß doch auch wissen, wie er dieselbe mit dem Zirkel ausführen kann.

1) Durch einen gegebenen Punkt A eine Parallele mit einer gegenüberstehenden Geraden MN zu ziehen. (Fig. 123.)

Erste Auflösung: mit einer einzigen Zirkelöffnung bewerkstelligt, anwendbar wenn der Abstand des Punktes A von der Geraden nicht allzu klein ist.

Nachdem man aus einem beliebigen jedoch nicht viel seitwärts abliegenden Punkt B über MN einen durch A gehenden Halbkreis CAD gezogen hat, so beschreibt man mit unverändertem Halbmesser aus A und C zwei Bögen, die sich in E schneiden, und zieht durch A und E die Gerade RS, so ist dieselbe parallel MN. Zur Probe kann man auch noch aus A und D mit demselben Halbmesser zwei Bögen beschreiben, welche einen Punkt F bestimmen, der ebenfalls auf RS liegen muß.

Zweite Auflösung: mit zwei verschiedenen Zirkelöffnungen vortheilhaft anwendbar, wenn der Punkt A nicht weit von MN absteht und nach allen Seiten Raum zu Gebot steht. (Fig. 124.)

Nachdem man aus einem beliebigen aber möglichst weit von A abstehenden Punkt B über MN einen durch A gehenden Halbkreis CAD gezogen hat, so nehme man DE = AC und ziehe durch die Punkte A und E die Richtung RS, so entspricht sie der Aufgabe. — Der Punkt B kann auch außerhalb MN liegen, da zwei Sehnen eines Kreises parallel sind, so bald gleiche Bögen zwischen denselben liegen.

Dritte Auflösung: mit verschiedenen Zirkelöffnungen, vortheihaft anwendbar, wenn der Punkt A nahe an MN liegt und der Raum nur nach einer Seite hin zugänglich ist. (Fig. 124.)

Nachdem man wie vorhin aus B den Bogen AC beschrieben hat, so beschreibe man jetzt noch aus C mit gleichem Halbmesser einen Bogen BD′, mache BD′ = AC, und ziehe durch A und D′ die Richtung RS, so genügt auch sie der Aufgabe.

2) Durch einen gegebenen Punkt A eine Gerade zu ziehen, welche mit einer anderen gegenüberstehenden Geraden MN einen gegebenen Winkel a mache. (Fig. 125.)

Wenn man den gegebenen Winkel in A an eine durch diesen Punkt mit MN parallel gezogene Richtnng anträgt, so ist der Aufgabe Genüge geleistet. Es ist jedoch nicht nöthig die Parallele zu ziehen, sondern es genügt, einen zweiten Punkt auf ihr zu haben. Hat man daher im gegebenen Winkel a mit nicht zu kleinem Halbmesser den Bogen DE gezogen, so kann man mit eben diesem Halbmesser den Punkt H auf der Parallelen bestimmen

nach Nro. 1. Nimmt man sodann HK = HI = DE und zieht die Linien AI und AK, so genügen sie der Aufgabe.

§. 57.

Die Konstruktion von senkrechten Geraden geschieht zwar ebenfalls am leichtesten mittelst der Winkeldreiecke nach §. 33, 1; allein da man, wo große Genauigkeit verlangt wird, den Winkeldreiecken nicht ganz trauen kann, so ist es dem Zeichner unerläßlich, auch die Zirkelkonstruktion hiefür zu kennen. Es gibt 4 verschiedene Fälle, welche mit Ausnahme des ersten beim Gebrauch der Winkeldreiecke sich auf einen reduziren.

1) Eine gegebene Gerade AB durch eine Senkrechte zu halbiren. (Fig. 126.)

Die gemeinschaftliche Sehne CD zweier aus den Endpunkten A und B der gegebenen Geraden mit gleichem Halbmesser beschriebener Schnittkreise, entspricht der Aufgabe. Denn bei diesem Verfahren sind AB und CD die Diagonalen eines Rhombus ACBD, die sich stets senkrecht halbiren.

2) In einem gegebenen Punkt A einer Geraden MN eine Senkrechte zu errichten. (Fig. 127.)

Die Halbirungslinie AD des gestreckten Winkels MAN nach §. 55, 3 gezeichnet, entspricht der Aufgabe, weil der gestreckte Winkel zwei Rechten gleich ist.

3) Von einem gegebenen Punkt A aus auf eine gegenüberstehende Gerade MN eine Senkrechte zu fällen. (Fig. 128.)

Hat man aus A einen die Gerade MN in B und C schneidenden Bogen, und sodann aus B und C mit beliebigen aber gleichen Halbmessern zwei in D sich schneidende Bögen gezeichnet, so ist AD die verlangte Senkrechte, denn es sind AD und BC die Diagonalen eines Deltoids, die senkrecht auf einander stehen (§. 3, 2).

4) Am Ende A einer gegebenen Geraden AM, d. h. ohne dieselbe zu verlängern, eine Senkrechte zu errichten. (Fig. 129.)

Hat man aus einem beliebigen über AM liegenden Punkte O einen Hilfskreis gezeichnet, der durch A geht und MN zum zweiten Mal in B schneidet, so bezeichnet der nach B gezogene Durchmesser dieses Kreises an

seinem anderen Ende C einen zweiten Punkt der gesuchten Senkrechten AC. Es ist nämlich < BAC als Peripheriewinkel im Halbkreis ein Rechter.

§. 58.

Die Konstruktion der Kreistangenten schließt folgende drei besondere Fälle ein.

1) An einen gegebenen Kreis O in einen gegebenen Punkt A seines Umfangs eine Tangente zu ziehen. (Fig. 130.)

Zieht man durch den Punkt A die Gerade EF senkrecht zum Halbmesser OA, so ist sie die gesuchte Tangente; da die Tangente stets senkrecht zum Halbmesser ihres Berührungspunktes ist.

2) An einen gegebenen Kreis O die Tangenten zu ziehen, welche mit einer gegebenen Geraden parallel, und diejenigen, welche senkrecht zu ihr sind. (Fig. 130.)

Die Tangenten EF und GH der Endpunkte des zu MN senkrechten Durchmessers AB sind || MN, und diejenigen der Endpunkte des mit MN parallelen Durchmessers CD stehen senkrecht zu MN.

3) An einen gegebenen Kreis O Tangenten zu ziehen, welche durch einen gegebenen Punkt A außerhalb des Kreises gehen. (Fig. 131.)

Ein über AO als Durchmesser beschriebener Hilfskreis bezeichnet auf dem Umfang des gegebenen Kreises O die Berührungspunkte B und C der gesuchten Tangenten, welche unmittelbar gezogen werden können. Die Winkel OBA und OCA sind nämlich als Winkel im Halbkreis Rechte, und daher sind AB und AC Tangenten des Kreises O.

§. 59.

Die Konstruktion des geometrischen Mittels zwischen zwei gegebenen Geraden, und die stetige Theilung und Verlängerung einer gegebenen Geraden muß ein geometrischer Zeichner wegen ihrer häufigen Anwendung kennen.

1) Konstruktion des geometrischen Mittels zwischen den zwei Abschnitten, in welchen eine Gerade AB durch einen gegebenen inneren Punkt C getheilt wird. (Fig. 132.)

Hat man über AB einen Halbkreis und in demselben die halbe

Sehne CD ⊥ AB gezogen, so ist diese das verlangte geometrische Mittel. Es verhält sich AC : CD = CD : CB.

2) Konstruktion des geometrischen Mittels zwischen den zwei Abschnitten, nach welchen eine gegebene Gerade AB durch einen äußeren Punkt C verlängert ist. (Fig. 133.)

Hat man über AC einen Halbkreis und in B die halbe Sehne BD ⊥ AC gezeichnet, so ist die Sehne CD das verlangte geometrische Mittel; nämlich AC:CD = CD:BC. Denn es ist in dem bei D rechtwinkligen Dreieck ADC die Kathete CD das geometrische Mittel zwischen der Hypotenuse AC und der anliegenden Kathete BC.

3) Stetige Verlängerung einer gegebenen Strecke AB. (Fig. 134.)

Mit den Katheten AB und AC = $^1/_2$ AB zeichne man das rechtwinklige Dreieck BAC, nehme auf der Hypotenuse das Stück CD = AC und auf der Verlängerung von AB das Stück BE = BD, so ist BE die gesuchte Verlängerung.

Erweitert man nämlich den Kreis C so, daß sein in B mit AB convergirender Durchmesser GD = 2 . CD = 2 . $^1/_2$ AB = AB gesehen wird, so verhält sich nach einem bekannten Satz der Elementargeometrie

$$BG : AB = AB : BD,$$

oder weil BE = BD, AB = GD und also auch AE = BG, nach Substitution dieser Werthe

$$AE : AB = AB : BE,$$

d. h. AB ist das geometrische Mittel zwischen den Abschnitten seiner Verlängerung oder es ist stetig verlängert.

4) Stetige Theilung einer gegebenen Strecke AB. (Fig. 134.)

Die stetige Verlängerung BE der Strecke AB rückwärts mit BF = BE auf AB aufgetragen bewirkt in F die stetige Theilung von AB unmittelbar.

Es folgt nämlich aus AE : AB = AB : BE unmittelbar

$$AE - AB : AB = AB - BE : BE,$$

oder weil AE − AB = BE = BF, AB − BE = AB − BF = AF, nach Substitution dieser Werthe

$$AB : BF = BF : AF,$$

d. h. der Punkt F bewirkt eine stetige Theilung der Strecke AB.

B. Kreistheilung.

§. 60.

Die Theilung des Kreises in eine gegebene Anzahl gleicher Theile ist eines der gewöhnlichsten Geschäfte des geometrischen Zeichners; man braucht nur an die gezahnten Räder, an die regelmäßigen Vielecke, überhaupt an die Zeichnung irgend eines der Größe nach gegebenen Winkels zu erinnern, um die Wichtigkeit dieser Operation fühlbar zu machen. Nun bieten zwar die regelmäßigen Vielstrahlen im Centrum eines Kreises angebracht ein sehr bequemes Mittel dar, welches die am häufigsten vorkommenden mit den Winkeldreiecken ausführbaren Fälle einschließt; allein dieses Mittel ist, wo große Genauigkeit gefordert wird, nicht genügend. Das blose Versuchsverfahren ist zeitraubend und der Nettigkeit der Zeichnung gefährlich, und somit geht an den Geometer doch wieder die Forderung von Seiten des Zeichners, ihm die bequemste Verfahrungsart zur Kreistheilung herbei zu schaffen. Um diesem Bedürfniß zu genügen, hat man Sehnentabellen entworfen, in welchen für alle Winkel die zugehörigen Sehnen des Kreises angegeben sind, und welche also jeden in Graden ausgedrückten Winkel mittelst eines tausendtheiligen Maßstabes zu zeichnen gestatten. Dieses Auskunftsmittel ist für seltenere Fälle fast unumgänglich, für die gewöhnlichen Fälle ist aber doch ein solcher weitschichtiger Apparat nicht wünschenswerth. Nun bieten die Sätze der Elementargeometrie noch einfache Mittel dar um die Kreistheilung bis auf 120 Theile zu treiben, sowohl für den ausschließlichen Gebrauch des Zirkels als auch für den gemischten Gebrauch des Zirkels und Lineals. In den folgenden Paragraphen werden wir das was die Geometrie hierin Praktisches zu bieten hat zur Kenntniß des Zeichners bringen.

§. 61.

Die Eigenschaft des gleichseitigen Dreiecks, Winkel von 60° zu haben, führt unmittelbar zu folgenden Kreistheilungen der Zirkelkonstruktion:

1) Dreitheilung eines gegebenen Halbkreises AMB. (Fig. 135.)

Der Halbmesser AO des Halbkreises läßt sich gerade drei mal auf seinem Umfang auftragen, wodurch also derselbe in drei gleiche Theile getheilt wird.

2) Sechstheilung eines Vollkreises O. (Fig. 136.)

Durch Umtragen des Halbmessers AO auf dem Umfang des Kreises, das keinen Rest zurückläßt, wird der Kreis in 6 gleiche Theile getheilt. Wenn man das Umtragen des Halbmessers von A aus nach beiden Seiten hin ausführt, so gewinnt das Verfahren an Genauigkeit und liefert im Punkt F die Probe desselben.

3) Dreitheilung des Kreisquadranten AOC. (Fig. 140.)

Trägt man von beiden Endpunkten A und C des Quadranten den Halbmesser AO je einmal auf, indem man AF = AO und CE = AO macht, so theilen die Punkte E und F den Quadranten AC in 3 gleiche Theile. Da nämlich $AC = 90^{\circ}$, $AF = 60^{\circ}$ und $CE = 60^{\circ}$, so ist nothwendig $FC = 30^{\circ}$, $AE = 30^{\circ}$ und $EF = 30^{\circ}$.

§. 62.

Die Zwei-, Vier- und Achttheilung des Kreises mittelst gemischter Konstruktion.

1) Die Zweitheilung des Kreises.

Diese wird durch jeden Durchmesser des Kreises vollzogen, da jeder Durchmesser den Kreis in zwei congruente Hälften theilt.

2) Die Viertheilung des Kreises. (Fig. 50.)

Diese geschieht durch jede zwei auf einander senkrechte Halbmesser, welche nach §. 57, 1 mittelst des Zirkels und Lineals gezeichnet werden können.

3) Die Achttheilung des Kreises O. (Fig. 50.)

Diese wird erhalten wenn man die rechten Winkel zweier senkrechten Durchmesser AC und BD in §. 55, 3, durch zwei weitere Durchmesser EF und GH halbirt.

§. 63.

Die Konstruktionen des vorigen Paragraphen können auch durch ausschließlichen Gebrauch des Zirkels ausgeführt werden.

1) Zweitheilung des Halbkreises ABC mittelst Zirkelkonstruktion. (Fig. 137.)

Nachdem man auf der Verlängerung des Durchmessers AD = AO genommen hat, beschreibe man aus B und D mit dem Durchmesser AB

zwei Bögen, die in E convergiren, so wird ein aus A mit AE beschriebener Kreis den Halbkreis in seiner Mitte C schneiden.

Beweis: Die zum Durchmesser Senkrechte EF halbirt den Halbmesser AO. Es ist also $AF = \frac{1}{2} AO$, während $4\,AO$ dem Durchmesser des zum Bogen AE gehörigen Halbkreises gleich ist. Somit ist aber nach §. 49, 1 AE das geometrische Mittel zwischen $\frac{1}{2}\,AO$ und $4\,AO$ oder

$$\tfrac{1}{2}\,AO : AE = AE : 4AO,$$

woraus
$$AE^2 = 2AO^2.$$

Zieht man aber $OC \perp AB$, so ist auch in dem rechtwinkligen Dreieck AOC

$$AC^2 = AO^2 + OC^2 = 2\,AO^2.$$

Mithin $AE = AC$, der Kreisbogen EC geht also durch die Mitte C des Halbkreises.

2) Halbirung eines beliebigen Kreisbogens AB mittelst Zirkelkonstruktion. (Fig. 138.)

Beschreibe aus den Endpunkten A und B mit dem Halbmesser AO zwei Bögen, welche durch den Mittelpunkt O gehen, nehme hierauf $OC = AB$, $OD = AB$, beschreibe nun aus C und D mit $BC = AD$ zwei weitere Bögen die in E convergiren. Beschreibt man jetzt noch einmal aus C und D zwei Bögen mit dem Halbmesser OE, so werden dieselben den gegebenen Bogen AB halbiren.

Beweis: Die Punkte C, O, D liegen, wie man leicht sieht, in einer Richtung, welche mit AB parallel und zu OE senkrecht ist; die Gerade BG, senkrecht zu dieser Richtung gezogen, halbirt die Sehne OD, so daß die Hälfte $OG = \frac{1}{2}\,OD = \frac{1}{2}\,AB$ und $GC = \frac{3}{2}\,AB$ ist.

In dem bei G rechtwinkligen Dreieck BGO ist also

$$BG^2 = BO^2 - OG^2 = BO^2 - \frac{AB^2}{4},$$

Ferner ist
$$GC^2 = (\tfrac{3}{2}\,AB)^2 = \tfrac{9}{4}\,AB^2.$$

Wenn man diese Gleichungen addirt und bemerkt, daß $BG^2 + GC^2 = BC^2$, so folgt

$$BC^2 = BO^2 + 2\,AB^2,$$

also auch
$$BC^2 - AB^2 = BO^2 + AB^2.$$

Nun ist aber $EO \perp OC$, $BC = EC$, $AB = OC$, folglich auch

$$BC^2 - AB^2 = EC^2 - OC^2 = OE^2,$$

somit
$$OE^2 = BO^2 + AB^2 = AO^2 + AB^2.$$

Die Gerade OE, welche senkrecht zu OC ist, halbirt aber den Bogen AB in F, es ist also auch

$$CF^2 = OF^2 + OC^2 = OA^2 + AB^2.$$

Die zwei letzten Gleichungen zeigen, daß CF = OE. Ein aus C mit OE beschriebener Kreis geht also durch die Mitte F des Bogens AB.

3) Viertheilung eines Kreises O mittelst Zirkelkonstruktion. (Fig. 139.)

Nachdem man aus einem beliebigen Punkt A des Kreisumfangs, von welchem die Viertheilung ausgehen soll, einen zweiten Kreis beschrieben hat, der den gegebenen Kreis in E und F schneidet, und noch FG = OF genommen hat, so beschreibe man aus G und E mit EF zwei Bögen, die sich in R schneiden, alsdann läßt sich AR vier mal im Kreis umtragen, und liefert dadurch in den Punkten A, B, C, D die gesuchte Viertheilung. Denn ein aus E mit AR beschriebener Kreis wird nach Nro. 2 den Bogen OF und also auch den Halbkreis EOFG halbiren, er ist also die Sehne des Kreisquadranten A. Da aber der Kreis O dem Kreis A gleich ist, so ist er auch die Sehne des Kreisquadranten O, und wird sich also vier mal auf dem Umfang des Kreises O umtragen lassen.

§. 64.

Zwölftheilung eines gegebenen Kreises O.

1) Mittelst gemischter Konstruktion. (Fig. 140.)

Die Konstruktionen §. 62, 2 und §. 61, 3 mit einander combinirt, liefern die Zwölftheilung des Kreises. Zieht man also 2 senkrechte Durchmesser AB und CD, und beschreibt aus ihren Endpunkten Kreise mit dem Halbmesser OA, so bringen dieselben mit den Durchmessern die gesuchte Zwölftheilung hervor.

2) Mittelst Zirkelkonstruktion. (Fig. 141.)

Die Konstruktion von §. 61, 2 kombinirt mit §. 63, 3 liefert eine Zwölftheilung. Der Halbmesser OA sechs mal auf dem Umfang umgetragen liefert die Punkte A, B, C, D, E, F der Sechstheilung. Der Halbmesser AG der Viertheilung aus den Punkten der Sechstheilung aufgetragen, halbirt die Bögen der Sechstheilung und liefert also die noch fehlenden Punkte H, I, K, L, M, N der Zwölftheilung.

§. 65.

Zehntheilung des Kreises durch gemischte Konstruktion.

1) Konstruktion eines Winkels von 36°. (Fig. 142.)

Konstruirt man mit einer beliebigen Geraden AB als Schenkel und

ihrer stetigen Verlängerung BC als Grundlinie ein gleichschenkliges Dreieck ABC, so ist der Winkel an der Spitze $A = 36^0$.

Nimmt man nämlich $AD = BC$, so wird AB durch D stetig getheilt (§. 59, 4) es verhält sich also

$$AB : AD = AD : BD,$$

oder, wenn man BC für AD setzt:

$$AB : BC = BC : BD.$$

Diese Proportion zeigt, daß $\triangle ABC \cong \triangle DBC$, und daß also das eine Dreieck wie das andere gleichschenklig und $CD = BC$ ist. Es ist also auch $AD = DC$, und das Dreieck ADC ist ebenfalls gleichschenklig. Die gleichschenklige Gestalt der drei Dreiecke ABC, BCD und ADC berechtigt aber zu nachstehender Folgerung:

$$< A = < DCB,$$

$$< A = < ACD,$$

also durch Addition $\quad 2 . < A = < ACB,$

$$2 < A = < ABC,$$

ohnehin $\quad < A = < BAC.$

Die drei letzten Gleichungen addirt, liefern aber unmittelbar

$$5 . < A = < ACB + < ABC + < BAC = 2 . R,$$

somit $\quad < A = {}^2/_5\, R = {}^2/_5 . 90^0 = 36^0.$

2) Zehntheilung des Kreises O durch gemischte Konstruktion. (Fig. 143.)

Die stetige Verlängerung AB des Kreishalbmessers OA läßt sich genau 10 mal auf dem Kreisumfang umtragen.

Denn wenn AB der stetigen Verlängerung des Halbmessers AO gleich ist, so ist $< AOB$ oder also Bogen $AB = 36^0$. Dieser Bogen AB ist also ${}^{360}/_{36} = 10$ mal im ganzen Kreis enthalten.

§. 66.

Zum Behuf der Zehntheilung des Kreises durch Zirkelkonstruktion ist die stetige Verlängerung einer Geraden mittelst Zirkelkonstruktion auszuführen.

1) Stetige Verlängerung von AB durch Zirkelkonstruktion. (Fig. 144.)

Nachdem man drei Kreise mit dem Halbmesser AB beschrieben hat,

einen aus A, einen zweiten aus B, und einen dritten aus C, dem Schnittpunkt der zwei ersteren, der dieselben in D und E schneidet, so beschreibe man jetzt aus D und E mit AD noch zwei Kreise die sich in F schneiden, und endlich noch einen Kreis aus C mit dem Halbmesser CF. Dieser letzte Kreis liefert in seinem Schnittpunkt mit der Richtung AB die gesuchte stetige Verlängerung BG dieser Linie.

Hat man nämlich noch im Kreis C den Durchmesser KL gezogen, welcher ebenfalls in G convergirt, so ist nach einem bekannten Satz der Kreislehre:

$$AG.BG = LG.KG = (CG + CL)(CG - CL)$$
$$= CG^2 - CL^2 = CF^2 - AB^2.$$

Nun ist aber CF die Sehne des Kreisquadranten für den Kreis C (§. 63, 3), also $CF^2 = 2AB^2$. Folglich, wenn man diesen Werth substituirt $AG.BG = 2AB^2 - AB^2 = AB^2$,
oder $AG : AB = AB : BG$.
d. h. BG ist die stetige Verlängerung von AB.

2) Zehntheilung des Kreises O durch Zirkelkonstruktion. (Fig. 145.)

Nachdem man nach Nro. 1 die stetige Verlängerung AG des Halbmessers OA konstruirt hat, trägt man dieselbe auf dem Umfang des Kreises auf, was ohne Rest geschehen kann, und die verlangte Zehntheilung unmittelbar liefert. (§. 65, 2.)

3) Zwanzigtheilung des Kreises durch Zirkelkonstruktion.

Nachdem man die Zehntheilung ausgeführt hat, so hat man nur noch von den Theilpunkten derselben die Weite BF der Viertheilung aufzutragen, so werden dadurch die Bögen der Zehntheilung halbirt, und es entsteht die Zwanzigtheilung.

4) Die Fünfzehntheilung des Kreises

gewinnt man ebenso durch eine Combination der Zehntheilung mit der Sechstheilung.

§. 67.

Durch Combination aller bisher entwickelten Mittel der Kreistheilung kann ein Transporteur von drei zu drei Graden gezeichnet oder also der Kreis in 120 gleiche Theile getheilt werden. (Fig. 146.)

Durch Umtragung des Halbmessers OA auf dem Umfang erhält man die Punkte A, B, C, D, E und F der Sechstheilung; durch das Verfahren §. 63, 3 bekommt man die weiteren Punkte G, H, I, K, L und M der Zwölftheilung durch Umtragung der Sehne des Kreisquadranten; die durch G und M gehenden Bögen dieser Umtragung begrenzen zugleich in ihrem Convergenzpunkt R die stetige Verlängerung AR des Halbmessers, so daß man dieselbe als Accidenz ohne alle Arbeit gewinnt. Wenn man nun noch mit AR aus allen Punkten der Zwölftheilung Bögen beschreibt, welche den Kreis O schneiden, und ebenso aus allen hiebei sich ergebenden Schnittpunkten immer mit demselben Halbmesser AR fortfährt Bögen zu beschreiben, so werden dadurch die Bögen der Zwölftheilung je in 5 gleiche Theile, der ganze Kreis also in 60 Theile getheilt. Die Convergenzpunkte dieser Bögen der Sechzigtheilung liegen selbst auf diametralen Richtungen der Hundertundzwanzigtheilung. Wenn man also diese Richtungen Oa, Ob... noch zieht, so bekommt man Bögen von 3°. Diese letzteren durch Versuchsverfahren noch in drei Theile getheilt, liefern einen vollständigen Transporteur. Wer dieses Verfahren mit Sorgfalt ausführt, wird finden, daß die Zirkelkonstruktion in Hinsicht genauen Resultates und der Zeitersparniß vor jeder gemischten Konstruktionsart und einem blosen Versuchsverfahren weithin die vortheilhafteste ist.

C. Regelmäßige Vielecke.

§. 68.

Das Trigon, Tetragon, Hexagon, Dodekagon und die zugehörigen regelmäßigen Vielsterne wird der Zeichner, wenn nicht überhaupt große Genauigkeit geboten ist oder eine kleine Ausdehnung dieser Gestalten dieselbe für das Zirkelgeschäft erschwert, immerhin mit den Winkeldreiecken konstruiren, allein wenn diese Genauigkeit gefordert wird, so wird er, wegen der mangelhaften Schärfe der Winkeldreiecke, zum Zirkel greifen. Dieß ist namentlich dann der Fall, wenn die regelmäßigen Gestalten nicht blos als Dekorationsmittel auftreten, sondern die Hauptgestalt bilden. Es ist daher nothwendig, die gemischten und reinen Zirkelkonstruktionen der regelmäßigen Vielecke im Einzelnen durchzugehen.

1) Zirkelkonstruktion des Trigons über einer gegebenen Seite AB desselben. (Fig. 147.)

Zwei aus A und B mit dem Halbmesser AB beschriebene Bögen bestimmen in ihrem Convergenzpunkt O das dritte Eck des Trigons ABO.

2) Zirkelkonstruktion des Hexagons über einer gegebenen Seite AB desselben. (Fig. 147.)

Nachdem man aus A und B mit dem Halbmesser AB zwei Kreise beschrieben hat, die sich in O schneiden, zieht man aus O mit demselben Halbmesser einen dritten Kreis in welchem AB sechs mal aufgetragen das verlangte Hexagon liefert.

3) Gemischte Konstruktion des Dodekagons über einer gegebenen Seite AB desselben. (Fig. 147.)

Nachdem man aus A und B mit AB zwei Kreise beschrieben hat, die sich in O und Q schneiden, und auf der Richtung OQ das Stück OO′ = AB genommen hat, beschreibt man aus O′ mit O′A einen dritten Kreis, in welchem AB 12 mal aufgetragen, das verlangte Dodekagon liefert. Es ist nämlich der Peripherie-Winkel $AO'B = \frac{1}{2} AOB = \frac{1}{2} 60^0 = 30^0$, also der Bogen $AB = \frac{30}{360} = \frac{1}{12}$ des Kreisumfanges O′.

§. 69.

Gemischte Konstruktion des Quadrats über einer Seite AB desselben.

Erste Art, mit zwei verschiedenen Zirkelöffnungen. (Fig. 148.)

Nachdem man wie bei der Konstruktion des Trigons mit AB aus A und B zwei Kreise beschrieben hat, die sich in P schneiden, und aus P einen dritten Kreis, der den verlängerten Bogen BP in Q schneidet, zieht man die Richtung BQ, welche den Bogen AP in R halbirt. Ist dieß geschehen, so liefert ein aus P mit PR beschriebener Kreis in den Convergenzpunkten C und D die zwei übrigen Eckpunkte des gesuchten Quadrats.

Zweite Art, bei drei verschiedenen Zirkelöffnungen. (Fig. 149.)

Nachdem man mit AB aus A und B zwei Kreise beschrieben und ihre gemeinschaftliche Sehne PQ gezogen hat, welche die Seite AB in R schneidet, so nimmt man auf derselben RO = AR und beschreibt noch aus O mit AO einen Kreis, so bestimmt derselbe in seinen Schnittpunkten C und D mit den ersten Kreisen die übrigen Ecken des gesuchten Quadrats.

Dritte Art mit einer Zirkelöffnung. (Fig. 150.)

Nachdem man wie bei der vorigen Art aus A und B mit AB zwei Kreise beschrieben und ihre gemeinschaftliche Sehne gezogen hat, so nimmt man auf derselben PR = AB und beschreibt aus R immer noch mit demselben Halbmesser einen dritten Kreis; dieser schneidet die zwei ersten Kreise in den Eckpunkten C und D des gesuchten Quadrats.

Wegen der Benützung des gleichen Halbmessers ist nämlich BCRP ein Rhombus also BC || PR; also, weil PR ⊥ AB nach Constr., auch BC ⊥ AB, aus ähnlichem Grund ist auch AD ⊥ AB. ABCD ist also ein rechtwinkliges gleichseitiges Parallelogramm, d. i. ein Quadrat.

§. 70.

Zirkelkonstruktion des Quadrats über einer Seite AB desselben.

Erste Art, wenn die Richtung der Grundlinie in größerer Ausdehnung gegeben ist. (Fig. 151.)

Hat man über der Richtung der Grundlinie mit dem Halbmesser AB aus A und B zwei Halbkreise beschrieben, so findet man die Halbirungspunkte C und D derselben nach §. 63, 1 indem man aus den äußeren Punkten E und F derselben mit dem Durchmesser AE Kreise beschreibt die sich in P schneiden, und sodann aus A und B mit AP zwei Bögen beschreibt, welche die Halbkreise in C und D schneiden. ABCD ist das verlangte Quadrat.

Zweite Art, ohne Verlängerung der Grundlinie. (Fig. 152.)

Nachdem man mit AB Kreise aus A und B und ihrem Convergenzpunkt P beschrieben hat, die sich in Q und R schneiden, so sucht man nach §. 63, 3 die Sehne BS ihres Quadranten, indem man aus Q und R mit AQ zwei Bögen beschreibt die sich in S schneiden. Beschreibt man nun aus A und B mit BS zwei Bögen, so bestimmen sie in C und D die noch fehlenden Ecken des gesuchten Quadrats.

§. 71.

Konstruktion des Pentagons über einer Seite AB desselben.

1) Gemischte Konstruktion desselben. (Fig. 153.)

Nachdem man aus A und B mit dem Halbmesser AB zwei Kreise beschrieben, und die stetige Verlängerung BR von AB nach §. 59, 3 gesucht hat, beschreibt man aus A und B noch zwei Kreise mit dem Halb-

messer AR, diese schneiden sich selbst und die zwei ersten Kreise in den noch fehlenden Eckpunkten C, D, E des gesuchten Pentagons.

Beweis: Aus §. 65, 1 folgt $< CAR = 36^0$, $< DAB = 2.36^0$, und weil $\triangle ABE \cong ABC$, so ist auch $< DAE = 36^0$. Der Eckvielstrahl A, BCDE ist also regelmäßig. Ebenso ist auch der Eckvielstrahl B, CDEA regelmäßig und mithin Vieleck ABCDE regelmäßig (§. 35).

2) Zirkelkonstruktion desselben. (Fig. 154.)

Sucht man die stetige Verlängerung BR nach der Regel des §. 66, 1, so ergibt sich, mit Beibehaltung alles Uebrigen wie im Vorausgehenden, eine reine Zirkelkonstruktion der Pentagons ABCDE.

§. 72.

Die in den vorausgehenden Paragraphen betrachteten regelmäßigen Vielecke sind wegen ihres häufigen Vorkommens ausführlich behandelt worden. In allen Fällen schließt die Kreistheilung das Mittel zur Konstruktion jedes regelmäßigen Vielecks ein. Hat man den Kreis in so viele gleiche Theile getheilt als das Vieleck Ecken haben soll, so setzen die Sehnen dieser Kreistheilung das inbeschriebene und die Tangenten der Theilpunkte das umbeschriebene regelmäßige Vieleck zusammen. Hat man ein Vieleck zu zeichnen, welches nicht in der Kreistheilung §. 67 enthalten ist, so muß die erforderliche Kreistheilung nach dem Versuchsverfahren von §. 55, 4 ausgeführt werden. Soll ein solches Vieleck über einer gegebenen Geraden AB gezeichnet werden, so müssen vorerst die Winkel des gleichschenkligen Dreiecks berechnet werden, welches diese Seite mit ihren Eckenaxen macht, und sodann muß mit diesen Winkeln das gleichschenklige Dreieck ABO selbst gezeichnet werden. Ist dieß geschehen, so kann in einem aus O mit OA beschriebenen Kreis die Sehne AB umgetragen und dadurch das gewünschte regelmäßige Vieleck ausgezogen werden.

Soll z. B über AB (Fig. 155) ein regelmäßiges Siebeneck gezeichnet werden, so beschreibe man aus B mit AB einen Halbkreis AIH, theile denselben durch Versuchsverfahren in 7 gleiche Theile, ziehe von A aus durch den zweiten Theilpunkt I die Richtung AO und mache $< ABO = < BAO$, so hat ein aus O mit AO beschriebener Kreis die Eigenschaft, daß AB genau 7 mal auf seinem Umfang aufgetragen werden kann. Die Sehnen zwischen den Theilpunkten des Kreises O bilden das verlangte regelmäßige Siebeneck. Auch halbirt der Schenkel BO den dritten Theil der Siebentheilung des Halbkreises AIH.

D. Grundgestalten der gothischen Ornamentik.

§. 73.

Die geradlinigen Gestalten des regelmäßigen Systems haben bei all' ihrem symmetrischen Bau doch eine gewisse Steifheit, die besonders gefühlt wird, wenn sie mit dem Kreis in Verbindung treten. Allein das regelmäßige System ist auch nicht auf die gerade Linie beschränkt; jede Form, jede Curve, die man in einem seiner untergeordneten Systeme zeichnet, vervielfältigt sich so gut wie die Gerade durch ihre Zuordnungsgestalten, und setzt mit denselben eine regelmäßige Vielheit zusammen. Ersetzt man nun alle geraden Linien des regelmäßigen Systems, mit Ausnahme der Axen, welche als Träger des Systems unentbehrlich sind, durch **Vollkreise** und **Kreisbögen**, so gelangt man zu denjenigen symmetrischen Gestalten, welche in der gothischen Ornamentik getroffen werden.

Die einfachen geradlinigen Gestalten des regelmäßigen Systems sind: das Vielseit, das Vieleck und der Vielstern, denselben entsprechen in der gothischen Ornamentik: der Vielpaß, das Vielblatt und die Rosette.

1) Der Vielpaß ist ein regelmäßiges Vielseit, dessen Seiten durch eine Gruppe einander zugeordneter Kreisbögen gebildet werden; wobei jedoch nur solche Bögen zugelassen werden, die nach außen gewölbt und kleiner als der Halbkreis sind.

2) Das Vielblatt ist ein regelmäßiges Vieleck, dessen Ecken durch eine Gruppe einander zugeordneter Kreise ersetzt sind, deren Mittelpunkte mit den Ecken des Vielecks coincidiren. Damit übrigens der Zusammenhang der ganzen Gestalt hergestellt sei, müssen sich die Kreise berühren oder schneiden. Hiebei werden jedoch nur diejenigen Theile der Kreise beibehalten, welche zwischen den Berührungs- oder Schnittpunkten liegen und nach außen gewölbt und größer als der Halbkreis sind.

3) Die Rosette ist ein regelmäßiger Vielstern, dessen Seiten durch eine Gruppe einander zugeordneter Bögen gebildet werden, die sich an den einwärtsspringenden Ecken berühren, und in welchen gewöhnlich noch die Axen dieser Ecken beibehalten sind.

Außer diesen aus Gruppen einander zugeordneter Kreisbögen bestehenden regelmäßigen Gestalten kommen noch vor der Vollkreis und der Doppelkreis. Der letztere besteht aus zwei gleichen Vollkreisen,

die sich von außen berühren; er kann übrigens nur da angewendet werden, wo der eine Kreis dem anderen zugeordnet ist.

Alle diese regelmäßigen Kreisgestalten kommen hauptsächlich als Dekorationsmittel vor, am häufigsten tritt noch der Vollkreis als Fensteröffnung selbstständig auf. Von vorzugsweise selbstständigem Gebrauch ist dagegen eine andere, dem einaxigen System angehörige Gestalt — der Spitzbogen.

Der Spitzbogen ist ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Schenkel durch Kreisbögen gebildet werden, die auf der Grundlinie senkrecht stehen. Wegen seines Gebrauchs als obere Endgestalt von Fenstern und Portalen, fehlt die Grundlinie, und die Kreisbögen berühren die aufrechten Seiten der sonst rektangulären Fenster und Portale an den Punkten ihres Anschlusses.

§. 74.

Von Vielpässen kommen nur zwei Gattungen vor: der Dreipaß und der Vierpaß, weil bei einer größeren Zahl von Seiten die Gestalt des Vielpasses sich zu sehr dem Vollkreis nähert.

Der Mittelpunkt eines jeden Vielpasses liegt auf der zugehörigen Seitenaxe, und zwar auf der nach innen gerichteten Ausdehnung derselben. Die Kreismittelpunkte seiner Seiten sind einander zugeordnet und bilden daher selbst wieder ein regelmäßiges Vieleck. Sie liegen daher alle auf einem aus dem Mittelpunkt des Systems beschriebenen Kreise, welcher um dieser Eigenschaft willen für die Konstruktion des Vielpasses von Werth ist.

Der Dreipaß ist dadurch ausgezeichnet, daß seine Seitenaxen durch die Ecken des Dreipasses gehen. Es gibt daher vom mathematischen Standpunkt aus drei Gattungen von Dreipässen: nämlich solche, deren Kreismittelpunkte in den Ecken des Dreipasses liegen, solche deren Kreismittelpunkte außerhalb, und solche, deren Kreismittelpunkte innerhalb des Dreipasses liegen. Die letzteren nähern sich dem Vollkreis um so mehr, je näher die Kreismittelpunkte dem Mittelpunkt des Systems liegen, welcher der Convergenzpunkt der Seitenaxen ist. Die letzte Gattung, deren Kreismittelpunkte im Innern des Dreipasses liegen, ist wegen ihrer Annäherung an den Vollkreis unzuläßlich. Die zwei Dreipasse (Fig. 156 und Fig. 157) repräsentiren daher die zwei in der gothischen Ornamentik gebräuchlichen Gattungen.

Der Vierpaß ist dadurch ausgezeichnet, daß seine Seitenaxen zwei

Paar Gegenseiten halbiren. Die Kreismittelpunkte der Seiten sollen ebenfalls nicht im Innern des Vierpasses liegen. Von den zwei gezeichneten Vierpässen ist der erste (Fig. 158) dadurch ausgezeichnet, daß die Kreismitttelpunkte O, O′, O″, O‴ der Seiten ein Quadrat bilden das demjenigen des Vierpasses ABCD gleich ist, und das zweite (Fig. 159) dadurch, daß die Seiten bei ihrer Verlängerung in den Mittelpunkten ihrer Kreise convergiren.

§. 75.

Das Vielblatt ist zwar in der Zahl seiner Blätter unbeschränkt, doch sind hauptsächlich nur das Drei-, Vier-, Fünf- und Sechsblatt im Gebrauch, wohl wegen des Mißverhältnisses, das bei größerer Blattzahl zwischen dem Raum eines Blattes zu demjenigen des inneren Kreises stattfindet. Die Halbmesser der blattbildenden Kreise erreichen ihr Minimum wenn dieselben sich berühren, und sie erreichen ihr Maximum bei Schnittkreisen, wenn die Punkte ihrer Blattwinkel ein Vieleck bilden, das demjenigen der Blattmittelpunkte umschrieben ist. Zwischen diesen zwei Extremen liegt der oft vorkommende Fall, wo jene Punkte der Blattwinkel mit den Blattmittelpunkten ein regelmäßiges Vieleck von doppelter Seitenzahl bilden. Uebrigens ist doch der Fall der beliebteste, welcher das Minimum der Blattkreishalbmesser darstellt. Zur Veranschaulichung des Gesagten sind für das Vierblatt die drei Hauptgestalten (Fig. 160, 161 und 162) gezeichnet.

§. 76.

Die Rosette ist von allen den Beschränkungen frei, welche bei den Vielpässen und Vielblättern getroffen werden. Zu jedem Axenvielstrahl des regelmäßigen Systems gehören unendlich viele Rosetten verschiedener Gestalt. Zu einer jeden Gruppe zusammengehöriger Punkte auf dem Axenvielstrahl der Ecken, welche die Blattspitzen der Rosette bezeichnen, können unendlich viele Rosetten gezeichnet werden, die sich durch die Lage der Blattwinkelpunkte unterscheiden, in welchen sich die einzelnen Blätter paarweise berühren. Weil die Seiten der Rosette durch Kreisbögen gebildet werden, die paarweise für die dazwischenliegenden Axen einander zugeordnet sind, so müssen auch die Kreismittelpunkte dieser Bögen einander zugeordnet sein, und also auf dem Umfang eines aus dem Mittelpunkt des Systems beschriebenen Kreise liegen. Sobald man also einen solchen

Mittelpunkt eines Bogens konstruirt hat, so ergeben sich die Mittelpunkte aller übrigen Bögen fast unmittelbar.

Die Konstruktion eines Blattes der Rosette (Fig. 164), wenn die Blattspitze C und der Punkt A des Blattwinkels gegeben sind, in welchem der Anschluß an das anliegende Blatt geschieht, ist sehr einfach. Das Mittelloth pq der Geraden AC und eine Senkrechte, welche in A auf OA errichtet wird, konvergiren in dem Mittelpunkt q des Kreises, zu welchem dieser Bogen gehört. Statt des Mittelloths pq kann man auch den Halbmesser des Punktes C ziehen, der senkrecht auf der Tangente des Punktes C ist, welche häufig gegeben ist. Mittelst dieser Regeln kann jede Rosette gezeichnet werden.

Nachdem der Kreis OC der Blattspitzen, und der Kreis OA des Anschlusses der Blätter gezeichnet sind, wird der Mittelpunkt q des Bogens AC und der Kreis Oq dieser Mittelpunkte konstruirt.

Die übrigen Bögen der Rosette ergeben sich nun einfach dadurch, daß man aus Punkten q, q'_1, q''_2, q'''_3 des Hilfskreises Oq immer mit demselben Halbmesser Aq Bögen beschreibt, welche beziehlich durch die Blattwinkelpunkte A, B, A′, A″ ꝛc. gehen.

§. 77.

Der Spitzbogen entspricht einem Rosettenblatt, und er unterscheidet sich nur dadurch von demselben, daß der Mittelpunkt des Systems in unendlicher Entfernung liegt, und die Axen der Blattwinkel parallel sind. Ist daher das dem Spitzbogen zu Grunde liegende gleichschenklige Dreieck ABC gegeben (Fig. 163), so führt ein ganz ähnliches Verfahren wie dasjenige von §. 76 zur Konstruktion des Spitzbogens.

Dos Mittelloth MN des Schenkels AC convergirt mit der Grundlinie AB im Mittelpunkt O des Bogens AC; nimmt man $BO' = AO$, so liefern zwei aus O und O′ mit OA beschriebene Kreise den gesuchten Spitzbogen ABC.

Die Gestalt des Spitzbogens hängt von dem Verhältniß $AB : OO'$, seiner Weite zur Centraldistanz seiner Seiten, ab. Dieses Verhältniß heißt deßhalb der Modulus des Spitzbogens.

Ist der Modulus des Spitzbogens $AB : OO' = 1$, so heißt der Spitzbogen einmodelig, ist dieser Modulus < 1, so ist der Spitzbogen von schlanker spitziger Gestalt, ist derselbe > 1, so ist derselbe weit und stumpf, wie die Figuren 260 und 225 zeigen können.

Anm. Die Dekoration der Grundgestalten der gothischen Ornamentik geschieht hauptsächlich durch Berührungskreise und führt zu den schwierigsten Konstruktionen der Elementargeometrie. Es muß daher hier auf das letzte Buch verwiesen werden, in welchem diesen Konstruktionen eine besondere Berücksichtigung zugedacht ist. Die Dekoration mit Vielpässen und Vielblättern gestattet keine allgemein anwendbare Regel und konnte daher in diesem Werke nicht berücksichtigt werden. Wer sich für diesen Theil der Dekoration interessirt, wird in dem Werke des H. Professor Reusch, „der Spitzbogen und die Grundlinien seines Maßwerks, ein geometrischer Beitrag zur Ornamentik des Mittelalters, Stuttgart, Verlag von J. B. Müller", Belehrung finden.

Viertes Buch.

Von den unzugänglichen Punkten.

---

§. 78.

Es kommt nicht selten vor, daß ein Punkt, bestimmt durch die Convergenz zweier Linien, weit über das Feld der Zeichnung hinausfällt und dadurch unzugänglich wird, andererseits aber zur Fortführung der Konstruktion unentbehrlich scheint. Eine solche Schwierigkeit kann auf zwei Arten beseitigt werden, nämlich entweder dadurch, daß man zur Erreichung des vorgesetzten Zwecks einen anderen Weg einschlägt, der von dem unzugänglichen Punkt unabhängig ist, oder aber, daß man innerhalb des Zeichnungsfeldes einen anderen Punkt aufsucht, welcher im Stande ist, denselben Dienst zu leisten, wie der unzugängliche Punkt. Dieses letztere Auskunftsmittel gestattet ein allgemeines, in allen einzelnen Fällen anwendbares Verfahren. Da nun von einem gewandten Zeichner erwartet werden darf, daß er solche Schwierigkeiten zu überwinden verstehe, so mußte diesem Verfahren eine eingehendere Beleuchtung gewidmet werden. Dasselbe verändert sich jedoch nach den Instrumenten, welche bei der Konstruktion benutzt werden. Die Winkeldreiecke sind besonders geeignet, gute Dienste zu leisten, übrigens ist schon das blose Lineal ausreichend um die Schwierigkeiten der unzugänglichen Punkte zu beseitigen. Allein, sowohl im einen als auch im anderen Fall, setzt das hiebei einzuhaltende Verfahren Kenntnisse voraus, welche in den gewöhnlichen Lehrbüchern der Geometrie nur mangelhaft oder gar nicht berücksichtigt werden; es mußte daher denselben hier in den folgenden Paragraphen einiger Raum gestattet werden.

§. 79.

Die Lehre von der Aehnlichkeit der Vielecke gewinnt ihre bedeutendste Anwendung, namentlich für den Zeichner, durch folgenden Satz:

Wenn zwei ähnliche Vielecke eine solche Lage haben, daß zwei Paare ihrer homologen Seiten parallel sind, so sind sie stets auch in einem gemeinschaftlichen Vielstrahl inbeschrieben, auch sind ihre übrigen homologen Seiten und Diagonalen parallel. (Fig. 165.)

Wenn in den ähnlichen Dreiecken ABC und A'B'C' die Seite AB || A'B' ist, so liegt der Convergenzpunkt O von AA' und BB' so, daß

$$AB : A'B' = AO : A'O,$$

und wenn überdieß auch die Seite AC || A'C' ist, so liegt der Convergenzpunkt Q von AA' und CC' so, daß

$$AC : A'C' = AQ : A'Q.$$

Da aber wegen Aehnlichkeit der Dreiecke ABC und A'B'C'

$$AB : A'B' = AC : A'C',$$

so folgt $AO : A'O = AQ : A'Q,$

also auch $(AO - A'O) : AO = (AQ - A'Q) : AQ.$

Da aber sowohl AO — A'O als auch AQ — A'Q = AA', so folgt aus der letzten Proportion, daß auch AO = AQ; d. h. daß die Geraden BB' und CC' in einem und demselben Punkt mit AA' convergiren, oder daß die Dreiecke ABC und A'B'C' in einen Dreistrahl O einbeschrieben sind; außerdem folgt noch weiter, daß

$$OC : OC' = OA : OA' = OB : OB',$$

folglich ist auch BC || B'C'.

Die Ausdehnung dieses Satzes auf Vielecke hat keine Schwierigkeit, wenn man bemerkt, daß dieselben durch homologe Diagonalen in ähnliche Dreiecke getheilt werden. Wenn z. B. in den ähnlichen Vierecken ABCD und A'B'C'D' die Seite AB || A'B' und die Seite AC || A'C' ist, so folgt aus AB || A'B', daß $\angle OAB = \angle OA'B';$

aus der Aehnlichkeit der Dreiecke ABD und A'B'D', daß

$$\angle BAD = \angle B'A'D',$$

also durch Addition $\angle OAD = \angle OA'D'.$

Hieraus folgt AD || AD'. Dieses Resultat zeigt, daß das Dreieckspaar ABD und A'B'D' sowie das Dreieckspaar ACD und A'C'D' je ein Paar paralleler Seiten besitzen, daß also jedes in einen Dreistrahl

einbeschrieben ist, daß diese zwei Dreistrahlen einen einzigen Vierstrahl zusammensetzen, der schon durch die Strahlen AA′ und BB′ bestimmt ist. Die gegebenen Vierecke sind also in einen Vierstrahl einbeschrieben, und es ist jedes Paar ihrer homologen Seiten und Diagonalen parallel.

§. 80.

Die Anwendung des vorausgehenden Satzes zur Lösung der hieher gehörigen Aufgaben kann aus folgenden einzelnen Fällen ersehen werden.

1) Von einem gegebenen Punkte A aus eine Gerade nach dem unzugänglichen Convergenzpunkt zweier gegebenen Geraden MN und RS zu ziehen. (Fig. 166.)

Nachdem man zwischen dem Punkt A und den Geraden MN und RS das Dreieck ABC nach Belieben eingezeichnet hat, so ziehe man zwischen eben diesen Geraden B′C′ || BC, B′A′ || BA, C′A′ || CA, wodurch der Punkt A′ sich bestimmt. Die Gerade PQ, welche durch A und A′ geht, entspricht der Aufgabe, da nach §. 79 die Richtungen AA′, BB′, CC′ in einem Punkt convergiren.

2) Mit der gegebenen Geraden KL eine Parallele zu ziehen, welche durch den unzugänglichen Convergenzpunkt der gegebenen Geraden MN und RS gehe. (Fig. 167.)

Nachdem man in einem beliebigen Punkt A′ der Geraden RS zu dem Strahl A′S noch die Strahlen A′B und A′C des Dreistrahls A′ gezogen hat, wird in diesem Dreistrahl ein Dreieck I′B′C′ nach Zweckmäßigkeit so eingezeichnet, daß I′B′ || MN, I′C′ || KL. Zieht man nun noch zwischen den Strahlen des Dreistrahls A′ die Richtung BC || B′C′ und durch den Punkt C die Richtung PQ || KL, so entspricht dieselbe der Aufgabe.

Bezeichnet man nämlich den unzugänglichen Convergenzpunkt der Richtungen MN und PQ mit I, so sind IBC und I′B′C′ zwei ähnliche Dreiecke mit parallelen Seiten; dieselben sind also in den Dreistrahl A′ einbeschrieben (§. 79), d. h. MN und PQ convergiren mit RS in einem Punkt.

3) Den Winkel zu halbiren, der durch zwei Gerade MN und RS mit unzugänglichem Convergenzpunkt gegeben ist. (Fig. 168.)

Hat man durch einen beliebigen Punkt A von MN die Richtung

AB || RS und die Gerade AC zwischen den gegebenen Geraden so gezogen, daß sie den Winkel BAN halbirt, so entspricht die senkrechte Halbirungslinie PQ der Strecke AC der Aufgabe.

Weil nämlich < BAC = < CAN und wegen dem Parallelismus der Geraden AB und RS auch < BAC = < ACS, so folgt < CAN = < ACS. Die Richtungen MN, RS bilden also mit AC ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Winkel an der unzugänglichen Spitze durch die senkrechte Halbirungslinie der Grundlinie AC halbirt wird.

4) Die Geraden AM, AN, BR und BS bilden ein Viereck mit zwei unzugänglichen, einander gegenüberstehenden Ecken; man soll die Diagonale eben dieser Ecken suchen. (Fig. 169.)

Nachdem man AB gezogen und in den Dreistrahl B das Dreieck A'C'D' so eingezeichnet hat, daß A'C' || AN, A'D' || AM; so ziehe man noch in beliebiger Richtung einen vierten Strahl durch B, welcher A'D' in F' und AM in F schneidet. Verbindet man nun F' mit dem Convergenzpunkt E' der Diagonalen C'D' und A'B, und zieht FE || F'E', so bestimmt diese Gerade auf AB den Punkt E, durch welchen die gesuchte Diagonale geht. Zieht man daher durch E die Richtung PQ || C'D', so entspricht sie der Aufgabe.

Heißen die unzugänglichen Convergenzpunkte der Geraden AM und AN mit PQ, beziehungsweise D und C, so sieht man, daß die Dreiecke EDF und E'D'F' parallele Seiten haben, folglich convergiren EE', FF' und DD' in B, und weil ebenso die Seiten der Dreiecke ADC und A'D'C' parallel sind, so convergiren DD', AA' und CC' in B. Hieraus folgt, daß PQ die unzugänglichen Ecken des gegebenen Vierecks verbindet.

5) Die Diagonalen eines Vierecks mit lauter unzugänglichen Ecken zu zeichnen, welches durch 4 Gerade KL, MN, RS und PQ gegeben ist. (Fig. 170.)

Nachdem man auf einer der Geraden, etwa auf RS einen Punkt O als Scheitel eines Vielstrahls beliebig gewählt, und nun die Strahlen desselben so gezogen hat, daß der erste Strahl durch einen Punkt E auf KL, der zweite durch einen Punkt F auf MN, der dritte durch einen Punkt G auf PQ geht, und zwischen diesen drei Strahlen E'F' || EF, F'G' || FG und nun durch die Punkte E', F' und G' die Geraden A'D' || KL, A'B' = MN und B'C' || PQ gezogen hat, so wird man bemerken, daß das Viereck A'B'C'D' dem gegebenen Viereck mit unzugänglichen Ecken ähnlich

ist, und daß in ersterem die Gerade E'F' in H' von der Diagonale A'C' und die Gerade F'G' in I' von der Diagonale B'D' geschnitten wird. Sucht man nun zu H' durch den Strahl OH' auf EF den homologen Punkt H, und zu I' durch den Strahl O'I' auf FG den homologen Punkt I und zieht endlich durch H die Richtung XY || A'C' und durch I die Richtung VW || B'D', so sind XY und VW die gesuchten Diagonalen des gegebenen Vierecks (§. 79).

6) In einem Dreieck mit unzugänglichen Ecken, gegeben durch die drei Geraden MN, PQ, RS den inneren Berührungskreis zu zeichnen.

Zeichne nach Nro. 3 die Halbirungslinien pq und rs der Winkel des gegebenen Dreiecks für zwei unzugängliche Ecken, so ist ihr Convergenzpunkt O der Mittelpunkt des gesuchten Berührungskreises, der nun leicht gezeichnet werden kann.

7) Die Seiten eines durch die Richtungen MN, PQ, RS gegebenen Dreiecks mit unzugänglichen Ecken zu halbiren. (Fig. 171.)

Ziehe zwischen den Richtungen MN und RS die Gerade B'C' || PQ und sodann B'A' || RS, C'A' || MN, suche hierauf die Mitte D' von B'C', so wird die Richtung D'A' die Richtung PQ in A schneiden und die Seite dieser Richtung halbiren. AB || RS und AC || MN halbiren sodann die Seiten der Richtungen MN und RS durch die Punkte B und C. Heißt nämlich der unzugängliche Convergenzpunkt der Richtungen MN und RS, a, so ist aB'A'C' ein Parallelogramm, die Diagonale A'a desselben halbirt also die Diagonale B'C' und fällt daher mit der Richtung A'D' zusammen. Diese Richtung muß also die Richtung PQ, bis zu den unzugänglichen Ecken verlängert, ebenso halbiren, wie sie die Parallele B'C' halbirt.

8) Die Seiten eines durch die Richtungen MN, PQ, RS gegebenen Dreiecks mit unzugänglichen Ecken je in 3 gleiche Theile zu theilen. (Fig. 172.)

Nachdem man wie in Nro. 1 durch das inbeschriebene Dreieck ABC die Zweitheilung des gegebenen Dreiecks ausgeführt und überdieß noch nach der Mitte P von BC die Richtung AP, und ebenso nach der Mitte E von AB die Richtung CE gezogen hat, so ziehe man durch den Convergenzpunkt O dieser Richtungen mn || MN, pq || PQ, rs || RS, so werden

diese Geraden die verlangte Dreitheilung der Seiten des gegebenen Dreiecks vollziehen.

9) Die Seiten eines durch die Richtungen MN, PQ, RS gegebenen Dreiecks mit unzugänglichen Ecken in 4 gleiche Theile zu theilen. (Fig. 171.)

Wenn man in das Dreieck ABC, welches die Seiten des gegebenen Dreiecks halbirt, noch ein zweites Dreieck DEF einbeschreibt, welches seinerseits die Seiten des Dreiecks ABC halbirt, so werden die Richtungen der Seiten dieser zwei Dreiecke die Seiten des gegebenen Dreiecks in vier gleiche Theile theilen.

10) Die Seiten eines durch die Richtungen MN, PQ, RS gegebenen Dreiecks mit unzugänglichen Ecken in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zu theilen, etwa in 5. (Fig. 173.)

Nachdem die Strecke AB, welche die Seiten der Richtungen MN und PQ halbirt, durch die Punkte d, e, f, g in 5 gleiche Theile getheilt hat, so ziehe man durch die abwechselnden Punkte e und g die Geraden EE′ und GG′ || MN, und durch die Punkte d und f die Richtungen DD′ und FF′ || PQ, so werden diese Richtungen in E, G, D, F die Seite der Richtung RS in 5 gleiche Theile theilen.

11) Die Höhen eines durch die Richtungen MN, RS, PQ gegebenen Dreiecks mit unzugänglichen Ecken zu zeichnen. (Fig. 174.)

Nachdem man die Gerade AB gezogen hat, welche die Seiten der Richtungen MN und PQ halbirt, ziehe man BC ⊥ RS und CD || MN, und durch den Punkt D die Gerade EF || BC, so ist sie die zur Richtung RS zugehörige Höhe des gegebenen Dreiecks.

§. 81.

Wie auch der Zirkel nicht ohne Vortheil bei den Aufgaben über unzugängliche Punkte benützt werden kann, mag an folgenden Beispielen gesehen werden.

1) Die Aufgabe §. 80, 1 wird mittelst des Zirkels folgendermaßen gelöst. (Fig. 175.)

Beschreibe aus dem gegebenen Punkt A zwei Kreisbogen, von welchen der erste durch die gegebenen Geraden MN und RS in den Punkten

B und C, und der zweite von den Halbmessern AB und AC in den Punkten B′ und C′ geschnitten wird. Die Richtungen B′D′ || MN und C′D′ || RS convergiren in einem Punkt D′, welcher mit A verbunden die gesuchte Richtung PQ liefert.

Die Bögen BC und B′C′ leisten hier die gleichen Dienste wie die parallelen Sehnen BC und B′C′ thun würden.

2) Die Aufgabe §. 80, 2 nimmt mit Benützung des Zirkels folgende Gestalt an. (Fig. 176.)

Nachdem man aus einem beliebigen Punkt A′ von RS zwei Kreise gezogen hat, von welchen der erste durch MN in B und der zweite von dem Halbmesser A′B in B′ geschnitten wird, ziehe man B′I′ || MN und I′C′ || KL nach dem innern Hilfskreis A′. Die Richtung des Halbmessers A′C′ bestimmt auf dem Kreis A′B einen Punkt C, durch welchen PQ || KL gezogen die verlangte Gerade liefert.

Die Kreisausschnitte A′B′C′ und ABC leisten hier die gleichen Dienste wie in §. 80, 2 die Dreiecke A′B′C′ und A′BC.

§. 82.

Die im Vorausgehenden gelehrte Behandlung der unzugänglichen Punkte verliert an Genauigkeit in dem Maße, als die Convergenz der Richtungen abnimmt, welche die unzugänglichen Punkte bestimmen; sie hört selbst ganz auf anwendbar zu sein, wenn statt der Convergenz ein wirklicher Parallelismus auftritt. In diesem Fall können die unzugänglichen Punkte durch Konstruktion von ähnlichen Figuren innerhalb des Zeichnungsfeldes nicht durch zugängliche Punkte ersetzt werden, und es ist eine ganz andere Behandlung nothwendig. Diese Behandlung, welche zugleich blos mit dem Lineal ausgeführt werden kann, erfordert aber wieder neue geometrische Kenntnisse, die wir um so mehr veranlaßt sind hier einzuschalten, als der Zeichner auch sonst deren nicht entbehren kann.

1) Jede Transversale des Dreiecks theilt die Seiten desselben auf solche Weise, daß die zwei dreigliedrigen Produkte der nicht aneinander liegenden Abschnitte einander gleich sind. (Fig. 177.)

Die Transversale DEF kann entweder alle Seiten des Dreiecks erst in ihrer Verlängerung schneiden, oder sie schneidet zwei Seiten in inneren

Punkten und nur die dritte Seite in ihrer Verlängerung. In jedem Fall ist, wenn man CG || DE zieht, in dem Dreieck AGC, weil DF || CG

$$AF:FC = AD:DG$$

und in dem Dreieck CBG, weil DE || CG

$$EC:BE = DG:BD,$$

also durch Multiplication

$$AF.EC:FC.BE = AD:BD,$$

oder $$AF.EC.BD = FC.BE.AD.$$

2) Jeder Dreistrahl, der um ein Dreieck beschrieben ist, theilt die Seiten desselben auf solche Weise, daß die zwei dreigliedrigen Produkte der nicht aneinanderliegenden Abschnitte einander gleich sind. (Fig. 178.)

Der Scheitel des umbeschriebenen Dreistrahls O kann in der Fläche des Dreiecks oder außerhalb desselben liegen; in jedem Fall liefert das Dreieck ACF von BE geschnitten nach Nro. 1 die Gleichung

$$AE.CO.FB = CE.AB.FO;$$

ebenso das Dreieck BCF, von AD geschnitten,

$$BD.CO.AF = CD.AB.FO.$$

Wenn man diese Gleichungen durch einander dividirt, kommt

$$\frac{AE.FB}{BD.AF} = \frac{CE}{CD},$$

oder $$AE.FB.CD = BD.AF.CE.$$

3). In jedem vollständigen Vierseit theilen sich die Diagonalen gegenseitig harmonisch. (Fig. 179.)

Wenn man die Seiten des ordinären Vierecks ABCD bis zu ihren Convergenzpunkten E und F verlängert, so heißt die ganze mit sechs Ecken ausgestattete Figur ein vollständiges Vierseit. Die Verbindungslinien AC, BD, EF seiner gegenüberstehenden Ecken sind seine Diagonalen, die in den Punkten P, Q und R convergiren. Nun wird das Dreieck AEF von der Transversale DBR geschnitten und es ist in den Dreistrahl C, AEF einbeschrieben, folglich hat man

$$AD.ER.FB = ED.AB.FR \text{ (nach 1)},$$
$$AD.EP.FB = ED.AB.FP \text{ (nach 2)},$$

durch Division $$ER:EP = FR:FP,$$

oder auch $$FP:EP = FR:ER,$$

die Diagonale EF wird also durch den innern Punkt P und durch den

äußeren Punkt R der zwei anderen Diagonalen in gleichem Verhältniß, d. h. sie wird harmonisch getheilt.

Ebenso führt das Dreieck ADB von der Transversale EFR geschnitten, und in den Dreistrahl C, BAD einbeschrieben zur Proportion BR:DR = BQ:DQ.

Auch führt das Dreieck ACE von der Transversalen DQR geschnitten und in den Dreistrahl F, ACE einbeschrieben zur Proportion AQ:CQ = AP:CP.

4) Wenn zwei harmonische Punktreihen einen entsprechenden Punkt gemeinschaftlich haben, so convergiren die Verbindungslinien der übrigen Punkte in einem und demselben Punkte. (Fig. 179.)

Wenn die harmonischen Punktreihen E, P, F, R und D, Q, B, R den Punkt R gemeinschaftlich haben, so convergiren die Verbindungslinien ED und FB jedenfalls in einem Punkt A, und die Verbindungslinien EB und DF in einem anderen Punkt C. Nun bilden aber diese Richtungen ein vollständiges Vierseit ABCDEF, in welchem die Diagonalen BD und EF durch AC in den Punkten P und Q harmonisch getheilt werden. Die Verbindungslinie AC geht also durch P und Q, und umgekehrt geht PQ durch A und C.

§. 83.

Wenn zwei Vielecke eine gleiche Anzahl von Seiten haben, so finden hinsichtlich ihrer gegenseitigen Lage folgende merkwürdige Beziehungen statt:

1) Wenn zwei Dreiecke eine solche Lage haben, daß ihre Seiten paarweise in Punkten einer Richtung convergiren, so sind sie in einen gemeinschaftlichen Dreistrahl einbeschrieben. (Fig. 180.)

Wenn die Seiten AB und A'B', AC und A'C', BC und B'C' in den Punkten E, F, G einer Richtung convergiren, so sind CFG und C'FG zwei Dreiecke, die von den Transversalen ABE und A'B'E' geschnitten nach §. 82, 1 folgende Gleichungen liefern

$$AF.BC.GE = AC.FE.BG,$$
$$A'F.B'C'.GE = A'C'.FE.B'G.$$

Durch Division folgt hieraus

$$\frac{AF.BC}{A'F.B'C'} = \frac{AC.BG}{A'C'.B'G},$$

oder durch Versetzung

$$1) \ \frac{AF.A'C'}{AC.A'F} = \frac{BG.B'C'}{BC.B'G}.$$

Bezeichnet man nun den Convergenzpunkt von AA′ und CC′ mit O, sowie denjenigen von BB′ und CC′ mit Q, so liefern die Dreiecke CC′F und CC′G, welche von den Transversalen AA′O und BB′Q geschnitten sind nach §. 82, 1 die Gleichungen

$$AF.CO.A'C' = AC.A'F.C'O \text{ oder } 2) \ \frac{C'O}{CO} = \frac{AF.A'C'}{AC.A'F}.$$

$$BG.CQ.B'C' = BC.B'G.C'Q \text{ oder } 3) \ \frac{C'Q}{CQ} = \frac{BG.B'C'}{BC.B'G}.$$

Aus 1, 2 und 3 folgt aber unmittelbar

$$C'O:CO = C'Q:CQ$$

$$(C'O - CO):CO = (C'Q - CQ):CQ,$$

oder

$$CC':CO = CC':CQ,$$

woraus $CO = CQ$; d. h. die Punkte O und Q coincidiren oder die Richtungen AA′ und BB′ convergiren mit CC′ in einem und demselben Punkt oder die Dreiecke ABC und A′B′C′ sind in den gemeinschaftlichen Dreistrahl O einbeschrieben.

2) Wenn zwei Dreiecke in einen gemeinschaftlichen Dreistrahl einbeschrieben sind, so convergiren ihre homologen Seitenpaare in Punkten einer Richtung. (Fig. 180.)

Wenn die Dreiecke ABC und A′B′C′ in den Dreistrahl O einbeschrieben sind und ihre Seitenpaare AC und A′C′, BC und B′C′ in den Punkten F und G convergiren, so haben die Dreiecke AA′F und BB′G eine solche Lage, daß ihre Seiten AA′ und BB′, AF und BG, A′F und B′G paarweise in den Punkten O, C, C′ einer und derselben Richtung convergiren; die Verbindungslinien AB, FG, A′B′ convergiren also (nach 1) in einem und demselben Punkt E. Die Punkte F, G und E liegen also in einer Richtung.

3) Wenn zwei vollständige Vielseite mit allen ihren sechs Ecken in einen gemeinschaftlichen Vielstrahl einbeschrieben sind, so convergiren ihre homologen Seiten paarweise in Punkten einer gemeinschaftlichen Richtung. (Fig. 181.)

Das Vielseit ABCD mit allen Convergenzpunkten, auch denjenigen von E und F, und das Vierseit A'B'C'D' mit allen Convergenzpunkten, welche in den Vierstrahl O einbeschrieben sind, bestehen aus zwei Paaren von Dreiecken.

Die Seiten der Dreiecke ABE und A'B'E' convergiren in den Punkten p, q, r einer Richtung; die Seiten der Dreiecke ADF und A'D'F' convergiren in den Punkten p, r, s einer Richtung. Da nun aber diese zwei Richtungen die zwei Punkte p und r gemeinschaftlich haben, so sind sie coincidirend. Die Convergenzpunkte p, q, r, s liegen also in einer gemeinschaftlichen Richtung. Dieselben Verhältnisse wiederholen sich bei Vielecken von größerer Seitenzahl.

4) Wenn zwei Vielseite mit allen Paaren ihrer Seiten in Punkten einer Richtung pq convergiren, und wenn außerdem noch die Eckpunkte, welche auf einem Paar dieser Seiten liegen, in einen Vielstrahl O einbeschrieben sind, so sind auch alle ihre übrigen Eckpunkte in eben diesen Vielstrahl O einbeschrieben und ihre Diagonalen convergiren paarweise in Punkten derselben Richtung pq. (Fig. 181.)

Gesetzt nämlich die Seitenpaare der Vierseite ABCD und A'B'C'D, convergiren in den Punkten p, q, r, s einer Richtung, zudem seien die Punkte A, D, E und A', D', E' eines Paares ihrer Richtungen in einen Dreistrahl O, ADE einbeschrieben, so folgt nach Nro. 3, daß auch die

Dreiecke ADF und A'D'F' in einen Dreistrahl O', ADF

Dreiecke AEB und A'E'B' in einen Dreistrahl O'', AEB

Dreiecke DEC und D'E'C' in einen Dreistrahl O''', DEC

einbeschrieben sind. Von diesen vier Dreistrahlen hat aber jedes Paar zwei Strahlen gemeinschaftlich: die Dreistrahlen O, ADE und O', ADF haben die Strahlen AA' und DD', die Dreistrahlen O, ADE und O'', AEB haben die Strahlen AA' und EE', die Dreistrahlen O, ADE und O''', DEC haben die Strahlen DD' und EE' gemeinschaftlich. Nun ist aber der Scheitel eines Vielstrahls schon durch zwei Strahlen bestimmt, die vier Dreistrahlen haben also einen gemeinschaftlichen Scheitel. Es sind somit die zwei gegebenen Vierseite ABCD und A'B'C'D' mit allen ihren sechs Ecken in einen Vielstrahl einbeschrieben, und ihre Diagonalen convergiren also auch paarweise in Punkten derselben Richtung pq wie ihre Seiten

(Nro. 3). Wenn die Vielseite eine größere Zahl von Seiten haben, so führt eine ähnliche Folgerung zu demselben Resultat.

§. 84.

Eine der wichtigsten Anwendungen der Sätze der zwei vorausgehenden Paragraphen besteht in der Behandlung der unzugänglichen Punkte bei blosem Gebrauch des Lineals. Das hiebei zu beobachtende Verfahren kann aus folgenden Aufgaben ersehen werden.

1) **Von einem gegebenen Punkte A aus eine Gerade nach den unzugänglichen Convergenzpunkt zweier gegebenen Richtungen MN und RS zu ziehen. (Fig. 182.)**

Erste Auflösung: Nachdem man zwischen den gegebenen Geraden durch den Punkt A zwei Geraden BC und DE und die Richtungen BE und CD bis zu ihrem Convergenzpunkt F gezogen hat, ziehe man noch einen dritten Strahl durch F, welcher die gegebenen Geraden MN und RS in den Punkten G und H schneidet und verbinde diese Punkte mit C und D durch zwei Gerade, die in einem Punkt I convergiren werden. Die Richtung PQ durch A und I gezogen entspricht der Aufgabe. Dieses Verfahren kann durch §.82, 4 oder auch durch 83, 1 gerechtfertigt werden. Die Dreiecke ABE und GHI convergiren mit ihren Seitenpaaren in den Punkten C, D, F der Richtung CF, folglich convergiren MN, PQ, RS in einem Punkte.

Zweite Auflösung (Fig. 180): Man zeichne zwischen A und den Geraden MN und RS zwei Dreiecke ABC und A′B′C′, so daß ihre Seitenpaare in den Punkten E, F, G einer Richtung convergiren, und ziehe PQ durch A und A′, so wird diese Linie mit den gegebenen MN und RS in einem Punkte convergiren (§. 57, 1).

2) **In einem Viereck mit zwei unzugänglichen Ecken, gegeben durch die Richtungen AM, AN, BR, und BS, die Diagonale der unzugänglichen Ecken zu zeichnen. (Fig. 183.)**

Zeichne mit den gegebenen Richtungen in einen Dreistrahl O, dessen Scheitel auf AB liegt, zwei Dreiecke AC′D′ und BCD dessen Seitenpaar CD und C′D′ in einem Punkt E des Zeichnungsfeldes convergiren, so ist E ein Punkt der gesuchten Diagonale (§. 57, 1). Sucht man auf dieselbe Weise durch einen weiteren Strahl OG einen zweiten solchen Punkt F,

und zieht durch E und F die Richtung PQ, so entspricht dieselbe der Aufgabe.

3) Es sind zwei Linienpaare a und b, c und d gegeben, die innerhalb des Zeichnungsfeldes nicht convergiren, man soll die Gerade ziehen, welche den Convergenzpunkt des einen Paares mit demjenigen des anderen Paares verbindet — vorausgesetzt überdieß, daß die Convergenz dieser Linienpaare ganz schwach ist. (Fig. 184.)

Ziehe drei in einem Punkt N convergirende Gerade MN, RN, SN von welchen die erste die gegebenen Geraden a, b, c, d in den Punkten A, B, C, D und die zweite in den Punkten p, q, r, s schneidet, alsdann zeichne einen Vierstrahl O, dessen Strahlen durch A, B, C, D gehen und die Gerade SN in den Punkten A′, B′, C′, D′ schneidet. Nun ziehe man A′p, B′q, C′r, D′s und verbinde den Convergenzpunkt Q des ersten Paares, mit dem Convergenzpunkt P des letzten Paares, durch eine Gerade, welche SN in E′, RN in t schneidet, ziehe durch E′ den Strahl OE′, welcher MN in E schneidet und ziehe durch t und E die Richtung e, so entspricht sie der Aufgabe. Die Richtigkeit dieses Verfahrens folgt unmittelbar aus §. 83, 4.

4) Es sind vier Parallelen a, b, c, d gegeben, man soll die Richtung zeichnen, welche den unendlich entfernten Convergenzpunkt des Paares a, b mit demjenigen des Paares c, d verbindet. (Fig. 185.)

Diese Aufgabe kann zwar auch nach der allgemeinen Methode Nro. 3 gelöst werden, aber es gibt noch einen viel kürzeren Weg. Hat man nämlich eine Transversale gezogen, welche die Parallelen in den Punkten A, B, C und D schneidet, so nimmt man auf den inneren Parallelen b und c nach entgegengesetzter Seite BA′ = AB und CD′ = CD und zieht A′B′, so convergirt diese Gerade mit der Transversalen in demjenigen Punkt E, durch welchen auch die gesuchte Verbindungslinie geht, welche übrigens den Parallelismus mit den gegebenen Parallelen theilt. Die Strecke AB bildet nämlich mit a und b ein Dreieck, dessen Spitze in unendlicher Entfernung liegt, und welches dem Dreieck ähnlich ist, das von CD und den Parallelen c und d gebildet wird. Denkt man sich nun die Spitzen dieser Dreiecke auf gleicher Seite der Transversalen AD, so liegt

die Verbindungslinie derselben ebenfalls in unendlicher Entfernung und ist also ganz unzugänglich. Denkt man sich aber die Spitzen auf entgegengesetzter Seite liegend, so muß ihre Verbindungslinie zwischen b und c liegen, mit diesen Geraden parallel sein und die Strecke BC in einem Punkt E schneiden, der dieselbe im Verhältniß der Größen AB und CD theilt. Beschreibt man nämlich über AB und CD zwei ähnliche Dreiecke, und zieht die Verbindungslinie ihrer Spitzen, so wird dieselbe die Transversale immer in demselben Punkt E schneiden, welche Höhe man auch den Dreiecken geben mag. Der Punkt E von den Dimensionen dieser Dreieckseiten unabhängig muß also auch den Schnittpunkt für die Verbindungslinie der Spitzen zweier durch die Parallelen gebildeten Dreiecke angeben.

Fünftes Buch.
Ergänzungen der Kreislehre.

A. Von den Polaren.

§. 85.

Wie das vollständige Vierseit, so ist auch der Kreis durch Eigenschaften der harmonischen Theilung ausgezeichnet; um sie aber zu entdecken, muß die harmonische Theilung auf einen der Natur des Kreises angemessenen Ausdruck gebracht werden. Der Kreis, ausgezeichnet durch seine bis zur allseitigen Regelmäßigkeit durchgebildete Symmetrie, läßt stets die Mitte aller seiner Linien wahrnehmen; jeder Durchmesser desselben wird durch den Mittelpunkt, und jede seiner Sehnen durch den senkrechten Durchmesser halbirt. Hinsichtlich des Kreises fragt es sich also, wie die zwei Punkte, welche eine gegebene Strecke harmonisch theilen, gegen die Mitte jener Strecke sich verhalten. Hierauf antwortet folgender Satz:

Zwei Punkte theilen eine Strecke harmonisch, wenn sie in solchen Entfernungen von der Mitte jener Strecke liegen, daß die Hälfte dieser Strecke das geometrische Mittel zwischen jenen Entfernungen ist, und umgekehrt. (Fig. 265.)

Ist nämlich O die Mitte der Strecke AB und verhält sich

$$OD:OB = OB:OC,$$

so ist auch $(OD + OB):(OD - OB) = (OB + OC):(OB - OC)$,

oder weil $OD + OB = OD + OA = AD$; $OD - OB = BD$,

$$OB + OC = OO + OC = AC,\ AB - OC = BC,$$

$$AD:BD = AC:BC,$$

d. h. die Strecke AB wird von den Punkten C und D harmonisch getheilt.

§. 86.

Wenn der Durchmesser eines Kreises durch irgend zwei Punkte harmonisch getheilt wird, und man zieht durch einen solchen Punkt eine Senkrechte zur Richtung des Durchmessers, so heißt dieselbe die Polare des anderen harmonisch zugeordneten Punktes, und dieser Punkt heißt seinerseits der Pol jener Polaren.

Ein Punkt und eine Gerade sind also Pol und Polare eines Kreises, wenn der durch den Punkt gehende Durchmesser des Kreises senkrecht auf der Geraden steht, und durch diese zwei Stücke harmonisch getheilt wird.

Weil nun von zwei Punkten die einander harmonisch zugeordnet sind, der eine in Hinsicht der Strecke, welche sie theilen, ein innerer und der andere ein äußerer ist, so folgt, daß die Polare eines inneren Kreispunktes außerhalb des Kreises liegt, und daß die Polare eines außerhalb des Kreises liegenden Punktes eines Sehne des Kreises ist. Auf dem Umfang des Kreises fallen Pol und Polare zusammen; die Polare eines solchen Punktes ist eine Tangente des Kreises, und ihr Pol ist der Berührungspunkt derselben. Wie überhaupt Polare und Kreistangenten sich zu einander verhalten, zeigen folgende Sätze:

1) Der Pol einer Sehne ist der Convergenzpunkt ihrer Endestangenten, und umgekehrt die Polare eines äußeren Punktes ist die Berührungssehne seiner Tangenten. (Fig. 186.)

Die Tangenten der Endpunkte E und F einer Kreissehne EF convergiren nämlich in einem Punkt des zur Sehne senkrechten Durchmessers ABC, und bilden mit den Halbmessern der Berührungspunkte rechtwinklige Dreiecke OEC und OFC, deren Höhen mit EF zusammenfallen.

Hieraus folgt nach §. 59, 1, daß OE oder also auch OA und OB das geometrische Mittel ist zwischen OD und OE, daß also nach §. 85 der Durchmesser AB von D und C harmonisch getheilt wird, und daß also der Punkt C und die Sehne EF sich als Pol und Polare verhalten.

2) Der Pol einer äußeren Geraden liegt auf der parallelen Sehne im Kreis deren Endestangenten in einem ihrer Punkte convergiren und umgekehrt. (Fig. 186.)

Der Pol der äußeren Geraden MN liegt auf dem senkrecht zu ihr gezogenen Durchmesser AB, und zwar ist es der zu dem Convergenzpunkt C

harmonisch zugeordnete Punkt D, welcher durch die Berührungssehne EF des Punktes C bestimmt wird.

§. 87.

Die Haupteigenschaft der Polare ist in folgendem Satz ausgesprochen:

Pol und Polare theilen jede Sehne des Kreises harmonisch, welche im Pol der Polaren convergirt. (Fig. 186.)

Wenn die Sehne HK in dem Pol C der Sehne EF convergirt, so convergiren auch die Tangenten der Punkte E und F in demselben Punkte C (§. 86, 1), und ein über OC als Durchmesser construirter Kreis I geht ebenfalls durch die Punkte E und F. EF ist also eine gemeinschaftliche Sehne der Kreise O und I, und weil sie mit HC in G convergirt, so ist sowohl das Produkt HG.GK, als auch das Produkt GK.GC gleich EG.GF, folglich

$$HG.GK = QG.GC.$$

Derselbe Hilfskreis I halbirt aber die Sehne HK in dem Punkt Q, da OQC als Winkel im Halbkreis ein Rechter ist, und jede Sehne durch den senkrechten Halbmesser halbirt wird. Es ist also $HQ = QK$, $HG = HQ + QG$, $GK = QK - QG = HQ - QG$. Diese Werthe in obige Gleichung substituirt geben

$$HQ^2 - QG^2 = QG.GC,$$

oder $$HQ^2 = QG^2 + QG.GC = QG.(QG + GC) = QG.QC.$$

Diese Gleichung zeigt aber, daß H, G, K, C harmonische Punkte sind, §. 85.

Für einen inneren Punkt C mit seiner äußeren Polare MN (Fig. 187) findet dasselbe Verhältniß statt, daß nämlich die durch C gehende Richtung EF, durch C und ihren Convergenzpunkt G mit der Polaren harmonisch getheilt wird. Zieht man nämlich noch den in G convergirenden Durchmesser HK und noch $CI \perp HK$, so sind die Dreiecke OCI und ODG ähnlich, folglich

$$OC:OI = OG:OD \text{ oder } OI.OG = OC.OD.$$

Da aber AB durch C und D harmonisch getheilt wird und also $OC.OD = OB^2$ ist, so ist auch

$$OI.OG = OB^2 = OK^2.$$

Mithin wird auch HK durch I und G harmonisch getheilt (§. 85)

und IC⊥HK ist die Polare des Punktes G (§. 86); folglich wird nach dem Vorausgehenden auch die Sehne EF durch C und G, oder was dasselbe ist, durch C und MN harmonisch getheilt.

§. 88.

Die in den vorausgehenden Paragraphen namhaft gemachten Beziehungen der Kreispolaren haben für den Zeichner zunächst den Werth, daß sie ihm Mittel bieten um verschiedene Konstruktionen am Kreis mit dem Lineal auszuführen, wie folgende Beispiele zeigen:

1) Zu einem gegebenen Punkt P im Kreis O seine Polare zu zeichnen. (Fig. 188.)

Nachdem man durch P zwei Sehnen AB und CD gezogen und das Vierseit ACBD mit den Convergenzpunkten E und F seiner Gegenseiten gezeichnet hat, ziehe man die Diagonale EF, so ist sie die gesuchte Polare.

Denn die Diagonale CD des vollständigen Vierseits ABCDEF wird durch die Diagonalen AB und EF in P und Q harmonisch getheilt, Q ist also ein Punkt auf der Polare des Punktes P (§. 87). Ebenso wird auch die Diagonale AB von den anderen Diagonalen in P und R harmonisch getheilt, R ist also ebenfalls ein Punkt der Polare des Punktes P. QR oder EF muß also diese Polare sein (§. 87).

2) Von einem gegebenen Punkte P aus eine Senkrechte auf einen gegebenen Durchmesser AB eines Kreises zu fällen. (Fig. 189.)

Ziehe von P nach den Endpunkten A und B des Durchmessers AB Richtungen, welche den Kreis O zum zweiten Mal in C und D schneiden, suche den Convergenzpunkt E der Sehnen AD und BC und und ziehe PE, so ist dieß die verlangte Senkrechte.

Denn nach Nro. 1 ist EP die Polare des Convergenzpunktes F der Sehnen AB und CD, welche nach §. 86 senkrecht auf dem durch den Pol F gehenden Durchmesser ist.

3) Von einem gegebenen Punkte P außerhalb eines Kreises O Tangenten an diesen Kreis zu ziehen. (Fig. 190.)

Zeichne genau nach Nro. 1 die Polare EF zum Punkt P, dieselbe wird, da P außerhalb des Kreises liegt, diesen in zwei Punkten M und N schneiden, durch welche auch die Tangenten PM und PN gehen (§. 86, 1).

B. Von den Aehnlichkeitspunkten zweier Kreise.

§. 89.

Bekanntlich heißen zwei Bögen zweier Kreise ähnlich, wenn ihre zugehörigen Centriwinkel gleich sind. Nun heißt eine gemeinschaftliche Sekante zweier Kreise Aehnlichkeitsstrahl, wenn sie die Kreise in zwei Paare ähnlicher Bögen theilt; und zwar heißt sie äußerer Aehnlichkeitsstrahl, wenn die ähnlichen Bögen auf gleicher Seite der Sekante liegen, und sie heißt innerer Aehnlichkeitsstrahl, wenn die ähnlichen Bögen auf verschiedenen Seiten der Sekante liegen. Die gemeinschaftlichen äußeren Tangenten sind also äußere Aehnlichkeitsstrahlen der Kreise, und die gemeinschaftlichen inneren Tangenten sind innere Aehnlichkeitsstrahlen derselben.

Die Centrallinie, welche die Kreise in Halbkreise zerlegt, ist ebenfalls ein Aehnlichkeitsstrahl, der eben so gut zu den äußeren als zu den inneren Aehnlichkeitsstrahlen gerechnet werden muß. Die Aehnlichkeitsstrahlen zweier Kreise können vermittelst folgender Eigenschaften leicht gezeichnet werden.

1) Eine Sekante zweier Kreise ist ein äußerer Aehnlichkeitsstrahl derselben, wenn sie durch die Endpunkte zweier paralleler und gleich gerichteter Halbmesser derselben geht. (Fig. 191.)

Die Gerade AA', welche die Endpunkte der gleichgerichteten und parallelen Halbmesser OA und O'A' verbindet, schneidet die Kreise zum zweiten Mal in den Punkten B und B', und bildet mit den Halbmessern dieser Punkte zwei gleichschenklige Dreiecke OAB und O'A'B', in welchen, weil OA || O'A', Winkel A = < A'. Diese Dreiecke sind also ähnlich und folglich < AOB = < A'O'B', Bogen AB ∾ Bogen A'B'.

2) Eine Sekante zweier Kreise ist ein innerer Aehnlichkeitsstrahl derselben, wenn sie durch die Endpunkte zweier paralleler und entgegengesetzt gerichteter Halbmesser geht. (Fig. 191.)

Wenn die parallelen Halbmesser OA und OA' entgegengesetzt gerichtet sind, so ändert sich an den Verhältnissen nichts als daß die ähnlichen Dreiecke OAB und O'A'B' auf verschiedenen Seiten von AA' liegen, ebenso auch die ähnlichen Bögen AB und A'B'. Die Sekante ist also ein innerer Aehnlichkeitsstrahl.

§. 90.

Die Unterscheidung der inneren und äußeren Aehnlichkeitsstrahlen gewinnt dadurch an Bedeutung, daß dieselben sich um zwei Punkte gruppiren, welche man Aehnlichkeitspunkte heißt.

1) Alle äußeren Aehnlichkeitsstrahlen zweier Kreise convergiren in einem Punkt ihrer Centralrichtung, welcher ihr **äußerer Aehnlichkeitspunkt** ist; ebenso convergiren alle inneren Aehnlichkeitsstrahlen der Kreise in einem inneren Punkt ihrer Centralrichtung, welcher ihr **innerer Aehnlichkeitspunkt** ist. Dieser äußere und innere Aehnlichkeitspunkt theilen die Centralrichtung im Verhältniß der Kreishalbmesser harmonisch. (Fig. 191.)

Der äußere Aehnlichkeitsstrahl AA′, die Centralrichtung OO′ und die parallelen Halbmesser OA und O′A′ bilden die ähnlichen Dreiecke OAP und O′A′P in welchen OP:O′P = OA:O′A′. Dasselbe ist der Fall mit dem inneren Aehnlichkeitsstrahl A𝔄′ und dem entgegengesetzt gerichteten Halbmesser; sie bilden mit OO′ die ähnlichen Dreiecke OA𝔓 und O′𝔄′𝔓, so daß ebenfalls O𝔓:O′𝔓 = OA:O′𝔄′. Die Punkte P und 𝔓 sind von der Lage der Halbmesser unabhängig und daher für alle möglichen Aehnlichkeitsstrahlen dieselben. Alle äußeren Aehnlichkeitsstrahlen gehen daher durch P, alle inneren durch 𝔓. Zudem ist OP:O′P = O𝔓:O′𝔓, d. h. P und 𝔓 theilen OO′ harmonisch.

2) Wenn sich zwei Kreise von außen berühren, so ist ihr Berührungspunkt zugleich ihr innerer Aehnlichkeitspunkt, und wenn sie sich von innen berühren, so ist ihr Berührungspunkt zugleich ihr äußerer Aehnlichkeitspunkt.

In diesem Fall ist nämlich das Verhältniß OP: O′P oder O𝔓:O′𝔓 unmittelbar auch das Verhältniß der Kreishalbmesser, weil im einen Fall P, im anderen Fall 𝔓 den Kreisumfängen angehört.

3) Bei zwei concentrischen Kreisen fällt der äußere und der innere Aehnlichkeitspunkt mit dem gemeinschaftlichen Mittelpunkt zusammen.

Mit O und O′ müssen auch P und 𝔓 zusammenfallen.

§. 91.

Durch jeden Aehnlichkeitspunkt werden zwei ähnliche Systeme bestimmt, welche nicht nur auf die Kreisumfänge sondern auch auf alle Punkte der Kreisflächen sich ausdehnen.

Man heißt daher jede Gerade, welche durch einen Aehnlichkeitspunkt geht, mag sie die Kreise schneiden oder nicht, Aehnlichkeitsstrahl, und zwar nach seinem Aehnlichkeitspunkt, äußeren oder inneren. Je zwei Punkte, in welchen zwei parallele Halbmesser einem Aehnlichkeitsstrahl begegnen, heißen homolog; zwei Richtungen heißen homolog, wenn sie durch homologe Punkte gehen und überdieß parallel sind.

Zwischen den homologen Punkten und homologen Richtungen eines Aehnlichkeitspunktes finden folgende Beziehungen statt:

1) Zwei Richtungen, welche durch zwei Paare homologer Punkte gehen, sind stets parallel und also selbst homolog, und die Entfernungen der homologen Punktpaare verhalten sich wie die Kreishalbmesser. (Fig. 192.)

Sind AP und BP zwei Aehnlichkeitsstrahlen des äußeren Aehnlichkeitspunktes P der Kreise O und O′, welche von den parallelen Halbmessern OD und O′D′, OE und O′E′ in den Punkten A und A′, B und B′ getroffen werden, so sind eben diese Punkte homolog. Weil auch die Centralrichtung durch P geht, so sind die Dreiecke OAB und O′A′B′ in den Dreistrahl P einbeschrieben, und es ist also nach §. 79 AB || A′B′. Die Strecken AB und A′B′ gehören also homologen Richtungen an, zugleich verhalten sie sich aber auch wie OA und O′A′. Da aber auch der Aehnlichkeitsstrahl DD′ in P convergirt, so folgt aus dem Parallelismus der Halbmesser OD und O′D′ auch die Proportion OA:O′A′ = OD:O′D′, folglich ist auch AB:A′B′ = OD:O′D′.

2) Die Convergenzpunkte zweier Paare homologer Richtungen sind homologe Punkte der Kreise. (Fig. 192.)

Die homologen Punkte A und A′, B und B′, auf den Aehnlichkeitsstrahlen AP und BP, und den parallelen Halbmessern OA und OA′, OB und OB′ liegend, bestimmen, dem Vorausgehenden gemäß, die homologen und parallelen Richtungen AB und A′B′. Sind nun auch BC || B′C′

und AC || A′C′ homologe Richtungen, so sind die Dreiecke ABC und A′B′C′ ähnlich und nach §. 79 in einen Dreistrahl einbeschrieben, es geht also auch CC′ durch P, wie ohnehin auch OO′. Die Vierecke OACB und O′A′C′B′ sind also nicht nur in den Vierstrahl P einbeschrieben, sondern es sind auch die Diagonalen OC und O′C′ parallel (§. 19), und die Punkte C und C′, wo diese Richtungen paralleler Halbmesser mit dem Aehnlichkeitsstrahl convergiren, sind ebenfalls homolog.

3) Homologe Strecken werden durch jeden Aehnlichkeitsstrahl in proportionale Abschnitte vom Verhältniß der Kreishalbmesser getheilt, und umgekehrt sind zwei Punkte homologer Strecken homolog, wenn sie dieselben in proportionale Abschnitte theilen.

Anm. Der erste Theil folgt unmittelbar aus 1, der zweite Theil aus dem bekannten Satz, daß Richtungen, welche zwei parallele Geraden proportional theilen, in einem Punkt convergiren.

4) In zwei Kreisen sind folgende Stücke stets homolog: die Mittelpunkte, parallele Durchmesser, parallele Sehnen, welche durch ein Paar homologer Punkte gehen; Sehnen deren beide Endpunkte homolog sind, Tangenten deren Berührungspunkte homolog sind, die Berührungspunkte paralleler Tangenten.

C. Von den Potenzlinien.

§. 92.

Oft ist die gemeinschaftliche Sehne zweier Schnittkreise zu einer Konstruktion unentbehrlich; allein häufig sind die gegebenen Kreise nicht Schnittkreise, und haben in Wirklichkeit keine gemeinschaftliche Sehne. Es muß also für diesen Fall eine Ersatzlinie aufgefunden werden, welche ohne gemeinschaftliche Punkte der Kreise einzuschließen, doch an allen sonstigen Eigenschaften der gemeinschaftlichen Sehne Theil hat. Diese Ersatzlinie heißt Potenzlinie.

Ist nämlich CD die gemeinschaftliche Sehne zweier Schnittkreise O und O′ (Fig. 193) und nimmt man irgend wo auf ihrer Richtung einen Punkt E nach Belieben und zieht durch denselben Schnittlinien nach den Kreisen, welche ihnen in den Punkten F, G, F′, G′ begegnen, so ist nach einem bekannten Satze

$$EG.EF = EC.ED \text{ und } EG'.EF' = EC.ED,$$

also ist auch EG.EF = EG'.EF'. Ist der Punkt E ein äußerer, so kann man noch die Tangenten EH und EH' ziehen, und es ist auch noch

$$EH^2 = EH'^2 = EG.EF = EG'.EF'.$$

Diese für jeden Punkt der gemeinschaftlichen Sehne sich gleich bleibenden Produkte heißt man auch Potenzen. Die gemeinschaftliche Sehne vereinigt also alle Punkte gleicher Potenzen; sie ist eine Potenzlinie derselben. Wie sich diese Potenzlinie auch in anderen Kreisen wiederfindet, die sich nicht schneiden, ist der Gegenstand der Untersuchung in den folgenden Paragraphen.

§. 93.

Das Vorhandensein einer Potenzlinie für alle Lagen zweier Kreise erhellt aus folgenden Sätzen:

1) Ein Punkt in der Ebene zweier Kreise heißt Potenzpunkt, wenn er zwei in ihm convergirende Sehnen so begrenzt, daß das Produkt der Abschnitte zwischen ihm und den Endpunkten der Sehne in dem einen Kreis so groß ist als im anderen. (Fig. 194.)

Es ist also E ein Potenzpunkt, wenn

$$ED.EC = ED'.EC'.$$

2) Werden zwei Kreise O und O' von einem dritten Kreis O'' geschnitten, so convergiren die gemeinschaftlichen Sehnen CD und C'D' der Schnittkreise stets in einem Potenzpunkt E der gegebenen Kreise O und O'. (Fig. 194.)

Weil nämlich CD und C'D' Sehnen eines und desselben Schnittkreises O'' sind, so ist

$$ED.EC = ED'.EC'.$$

Es ist also E ein Potenzpunkt der Kreise O und O' (Nro. 1).

3) Zieht man durch irgend einen Potenzpunkt C zweier Kreise eine Senkrechte auf ihre Centrale, so vereinigt sie alle Potenzpunkte der zwei Kreise, oder sie ist die Potenzlinie derselben. (Fig. 195.)

Ist C irgend ein nach 2 bestimmter Potenzpunkt der Kreise O und O', und sind DE und D'E' zwei Durchmesser dieser Kreise, welche in demselben convergiren, so ist

$$CD.CE = CD'.CE',$$

oder $(CO + OD)(CO - OD) = (CO' + O'D')(CO' - O'D')$,
d. i. $$CO^2 - OD^2 = CO'^2 - O'D'^2$$

Zieht man nun $CK \perp OO'$ und subtrahirt CK^2 von beiden Seiten der Gleichung, so kommt
$$CO^2 - CK^2 - OD^2 = CO'^2 - CK^2 - O'D'^2.$$

Weil aber OKC und O'KC bei K rechtwinklige Dreiecke sind, und also $CO^2 - CK^2 = OK^2$, $CO'^2 - CK^2 = O'K^2$ ist, so erhält man, wenn man diese Werthe substituirt, und noch OA für OD, O'A' für O'D' setzt
$$OK^2 - OA^2 = O'K^2 - O'A'^2,$$
oder $(OK + OA)(OK - OA) = (O'K + O'A')(O'K - O'A')$,
d. i. $$AK.BK = A'K.B'K.$$

Der Punkt K ist also ein Potenzpunkt der Kreise O und O'. Weil nun aber der Potenzpunkt C ganz beliebig genommen wurde, so folgt, daß überhaupt jeder Potenzpunkt der Kreise die Eigenschaft hat, daß die von ihm auf die Centrale gefällte Senkrechte durch den Potenzpunkt K derselben geht, oder also auch umgekehrt, daß die in dem Potenzpunkt K der Centralen errichtetete Senkrechte durch jeden anderen Potenzpunkt geht. Diese Senkrechte, welche somit alle Potenzpunkte der gegebenen Kreise verbindet, ist also in Wirklichkeit die Potenzlinie derselben, und außerhalb ihrer gibt es keinen Potenzpunkt des Kreises mehr.

§. 94.

Hinsichtlich der verschiedenen Kreispaare müssen folgende Fälle der Potenzlinie unterschieden werden:

1) Die zwei Kreise sind Schnittkreise; alsdann ist die Richtung ihrer gemeinschaftlichen Sehne ihre Potenzlinie.

2) Die zwei Kreise berühren sich; alsdann ist die Tangente des Berührungspunktes ihre Potenzlinie.

3) Die zwei Kreise liegen auseinander; alsdann liegt die Potenzlinie zwischen ihnen.

Denn die Tangenten eines zwischen denselben liegenden Berührungskreises convergiren in einem Punkt zwischen den Kreisen, der nach §. 93, 2 zugleich ein Potenzpunkt der Kreise ist.

4) Die zwei Kreise liegen ineinander, alsdann liegt die Potenzlinie außerhalb ihrer.

Denn man muß von jedem Punkt der Potenzlinie Tangenten

an die Kreise ziehen können, was nur möglich ist, wenn sie außerhalb der Kreise liegt.

§. 95.

Es ist nothwendig die Lage der Potenzlinie gegen die Kreise noch bestimmter zu kennen, als dieß im vorausgehenden Paragraphen beabsichtigt war. Hiezu ist es aber zweckmäßig, sich über die Bezeichnung der Punkte zu verständigen, in welchen die Kreise von ihrer Centralen OO′ geschnitten werden. Kommt man überein, die auf gleicher Seite der Mittelpunkte liegenden Punkte mit denselben Buchstaben des Alphabets zu bezeichnen, also die dießseits mit A und A′, und die jenseits mit B und B′, so kann man gleichnamige Punkte A und A′, B und B′, und ungleichnamige A und B′, A′ und B unterscheiden. Diese Bezeichnung vorausgesetzt, finden nun folgende Gesetze statt:

1) Jede zwischen zwei ungleichnamigen Punkten liegende Strecke der Centralen wird von der Potenzlinie in zwei Abschnitte getheilt, die sich verhalten wie die zwischen den gleichnamigen Punkten liegenden Strecken. (Fig. 195.)

Für zwei auseinanderliegende Kreise ist, wenn K der Schnittpunkt der Potenzlinie MN ist

$$AK.BK = A'K.B'K,$$

also
$$AK:A'K = B'K:BK,$$

und
$$(AK + A'K):(B'K + BK) = AK:B'K = A'K:BK,$$

d. i.
$$AA':BB' = AK:B'K = A'K:BK.$$

2) Jede zwischen zwei gleichnamigen Punkten liegende Strecke der Centralen wird von der Potenzlinie in zwei Abschnitte getheilt, die sich verhalten wie die zwischen den ungleichnamigen Punkten liegenden Strecken. (Fig. 195.)

Aus obiger Proportion $AK:A'K = B'K:BK$

folgt auch $(AK + B'K):(A'K + BK) = AK:A'K = B'K:BK,$

oder
$$AB':A'B = AK:A'K = B'K:BK.$$

3) Für die Berechnung ist es wichtig zu bemerken,

daß wenn man $OA = r$, $O'A' = r'$ und $OO' = d$ setzt:

$AA' = d + r - r'$, $BB' = d + r' - r$, $AB' = d + r + r'$, $A'B = d - r - r'$,

und also

$$AK:B'K = A'K:BK = d + r - r':d - r + r',$$
$$AK:A'K = B'K:BK = d + r + r':d - r - r'.$$

§. 96.

Die Potenzlinie zweier Kreise hat eine sehr einfache Beziehung zu den Polaren ihrer Aehnlichkeitspunkte, wie folgende Sätze zeigen:

1) Die Abschnitte, in welche der Durchmesser eines der Kreise von seiner Polare des äußeren Aehnlichkeitspunktes getheilt wird, verhalten sich wie die Abschnitte, in welche eine Strecke zwischen zwei gleichnamigen Punkten von der Potenzlinie getheilt wird. (Fig. 196.)

Ist mn die Polare des äußeren Aehnlichkeitspunktes P im Kreise O, k ihr Schnittpunkt mit der Centralen, und K derjenige der Potenzlinie MN, so verhalten sich als homologe Strecken der ähnlichen Systeme §. 91, 1:

$$AP:BP = A'P:B'P,$$

also $$AP - A'P:BP - B'P = AP:BP,$$

oder $$AA':BB' = AP:BP.$$

Ferner weil Pol und Polare den Durchmesser eines Kreises harmonisch theilen, nach §. 87

$$Ak:Bk = AP:BP,$$

aber auch nach §. 95, 1

$$AA':BB' = AK:B'K = A'K:BK,$$

aus diesen drei letzten Proportionen folgt

$$AK:B'K = A'K:BK = Ak:Bk.$$

2) Die zwei Abschnitte, in welche der Durchmesser einer der zwei Kreise durch die Polare des inneren Aehnlichkeitspunktes getheilt wird, verhalten sich wie die zwei Abschnitte, in welche die Strecke zwischen zwei ungleichnamigen Punkten durch die Potenzlinie der Kreise getheilt wird. (Fig. 202.)

Schneidet die Polare mn des inneren Aehnlichkeitspunktes P im Kreis O den Durchmesser AB dieses Kreises im Punkt k, so hat man, wie im vorausgehenden Fall nach §. 91, 1:

$$AB':A'B = AP:BP$$

und nach §. 87: $$Ak : Bk = AP:BP,$$

und nach §. 95, 2: $$AB':A'B = AK:A'K = B'K:BK,$$

folglich $$AK:A'K = B'K:BK = Ak:Bk.$$

§. 97.

Sowohl die Potenzlinie als auch die Polaren der Aehnlichkeitspunkte zweier Kreise können ohne Hilfe der Aehnlichkeitspunkte gezeichnet werden, was nicht nur wegen Abkürzung der Konstruktion, sondern auch darum von Werth ist, weil die Aehnlichkeitspunkte oft unzugänglich werden. Es gibt zwei kennenswerthe Verfahrungsweisen, wovon die eine die Konstruktion der Potenzlinie nach §. 93, 3, wenn sie nicht bekannt ist, voraussetzt.

1) Zu zwei gegebenen Kreisen O und O′ die Potenzlinie und die Polaren ihres äußeren Aehnlichkeitspunktes ohne Hilfe des Zirkels zu zeichnen. (Fig. 197.)

Nachdem man die Centrale ABA′B′, sowie die parallelen und homologen Sehnen AD und A′D′ und den Aehnlichkeitsstrahl DD′ gezogen hat, welcher die Kreise zum zweiten mal in C und C′ schneidet, so ziehe man durch den Convergenzpunkt F der Sehnen AD und BC die Sehne mn ⊥ AB und ebenso durch den Convergenzpunkt E der Sehnen AD und B′C′ die Gerade MN ⊥ AB′, so ist mn die Polare des äußeren Aehnlichkeitspunktes und MN die Potenzlinie der Kreise O und O′. — Die Begründung dieses Verfahrens ergibt sich unmittelbar aus §. 87, 1 hinsichlich der Polaren, und hinsichtlich der Potenzlinie aus §. 96, 1, wenn man bemerkt, daß C′B′ ∥ CB und also Dreieck AB′E ∼ Dreieck ABF, mithin AK : B′K = Ak : Bk.

2) Die Potenzlinie und die Polaren des inneren Aehnlichkeitspunkts zweier gegebenen Kreise O und O′ ohne Hilfe des Zirkels zu zeichnen. (Fig. 198.)

Nachdem man die Centrale ABA′B′, und in entgegengesetzter Richtung die parallelen und daher homologen Sehnen AD und B′D′, sowie den inneren Aehnlichkeitsstrahl DD′ gezogen hat, welcher die Kreise zum zweiten mal in den homologen Punkten C und C′ schneidet, ziehe man durch den Convergenzpunkt F der Sehnen AD und BC die Sehne mn ⊥ AB und ebenso durch den Convergenzpunkt E der Sehnen AD und A′C′ die Gerade MN ⊥ AB′. Nach §. 87 folgt, daß mn die Polare des inneren Aehnlichkeitspunktes, und aus §. 96, 2 daß MN die Potenzlinie der Kreise ist. Weil nämlich als homologe Sehnen der Kreise BC ∥ A′C′ ist, so folgt, daß Dreieck AA′E ∼ Dreieck ABF, und daher Ak : Bk = AK : A′K.

3) Die Potenzlinie und die Polare zwischen einem Kreis O und einem Punkt O′ ohne Hilfe des Zirkels zu zeichnen. (Fig. 199.)

Der Kreis O′ ist hier auf einen Punkt reduzirt, der innere und der äußere Aehnlichkeitspunkt fallen deßwegen mit diesem Punkt zusammen, und es gibt nur eine Polare; jede durch O′ gehende Richtung O′DC ist deßwegen Aehnlichkeitsstrahl, und liefert im Schnittpunkt F der Sehnen AD und BC einen Punkt der Polare mn, welche durch F geht und zu AB senkrecht ist. Die Richtung AD und eine durch O′ mit BC gezogene Parallele convergiren in einem Potenzpunkt E der Kreise O und O′. Zieht man also durch E die Gerade MN || mn, so ist sie die verlangte Potenzlinie. In diesem Fall muß MN die Strecke O′k zwischen O′ und mn halbiren; denn O′n berührt den Kreis O und muß also von MN so in G geschnitten werden, daß Gn = GO′ (§. 92), weil G ein Potenzpunkt zwischen O und O′ ist. Diese Bemerkung kann als Probe dienen.

4) Die Potenzlinie MN zweier Kreise O und O′ ist entweder nach §. 93, 3 konstruirt, oder als gemeinschaftliche Sehne zweier Schnittkreise gegeben; man soll die Polare des äußeren Aehnlichkeitspunktes im Kreis O zeichnen. (Fig. 200 u. 201.)

Ob die Kreise aus einander liegen oder sich schneiden, bewirkt keine Verschiedenheit, in dem einen wie in dem anderen Fall zieht man durch die äußeren Punkte B und B′ der Centrale zwei Parallelen in beliebiger Richtung, von welchen die letztere in einem Punkt F mit der Potenzlinie MN, und die erstere mit der Richtung AF in einem Punkt G der gesuchten Polare convergirt. Zieht man also durch G die Richtung mn ⊥ OO′, so ist dieß die verlangte Polare des äußeren Aehnlichkeitspunktes der Kreise O und O′ im Kreis O. Weil nämlich die Dreiecke AB′F und ABG ähnlich und die Geraden MN und mn parallel und daher homologe Richtungen derselben sind, so verhält sich AK : B′K = Ak : Bk. Die Gerade mn ist also nach §. 96, 1 die Polare des äußeren Aehnlichkeitspunktes.

5) Die Potenzlinie MN zweier Kreise O und O′ ist entweder nach §. 93, 3 konstruirt, oder als gemeinschaftliche Sehne zweier Schnittkreise bekannt; man soll die Polare des inneren Aehnlichkeitspunktes im Kreis O zeichnen. (Fig. 202 u. 203.)

Die Konstruktion der Polare des inneren Aehnlichkeitspunktes stimmt mit derjenigen des äußeren Aehnlichkeitspunktes bis auf die Abweichung überein, daß die Parallelen durch die ungleichnamigen Punkte A' und B gehen müssen; die erste convergirt mit der Potenzlinie MN in einem Punkte F, und die zweite convergirt mit AF in dem Punkt G der Polare des inneren Aehnlichkeitspunkts. Zieht man also mn ⊥ OO' durch G, so ist dieß die verlangte Polare für den Kreis O. Dieselbe liegt für Schnittkreise außerhalb dieses Kreises, weil der innere Aehnlichkeitspunkt innerhalb des Kreises O liegt. Die Dreiecke AA'F und ABG sind ähnlich, die Geraden MN und mn sind homologe Richtungen derselben, so daß Ak : Bk = AK : A'K, woraus erhellt, daß mn die Polare des inneren Aehnlichkeitspunkts im Kreis O ist (§. 96, 2).

6) Polare und Potenzlinie zwischen einem gegebenen Kreis O und einem gegebenen Punkt O' mit Benützung des Zirkels zu zeichnen. (Fig. 204.)

Weil der Kreis O' auf einen Punkt reduzirt ist, so führt ein Schnittkreis der gegebenen Kreise O und O' nicht zum Ziele, da die Richtung der Sehne in dem unendlich kleinen Kreis O' unbestimmt bleibt. Errichtet man aber in O' auf OO' eine Senkrechte und beschreibt aus irgend einem Punkt X derselben einen Kreis der durch O' geht und den Kreis O in den Punkten a und b schneidet, so ist OO' die Tangente des unendlich kleinen Kreises O' und gibt in ihrem Konvergenzpunkt K mit der Sehne ab eben denjenigen Potenzpunkt zwischen O und O', der auf der Centrale OO' liegt. Die Gerade MN ⊥ OO' durch K gezogen, liefert also die gesuchte Potenzlinie. Nimmt man nun Kk = O'K und zieht durch k die Sehne mn ⊥ OO', so ist sie die gesuchte Polare, wie solches aus dem hervorgeht, was bei Nro 3 gelegentlich gesagt wurde.

§. 98.

Die Konstruktion der gemeinschaftlichen Tangenten zweier Kreise ist eine unmittelbare Anwendung der Konstruktion der Polare ihrer Aehnlichkeitspunkte.

1) Ohne Hilfe des Zirkels die äußeren und die inneren gemeinschaftlichen Tangenten zweier gegebenen Kreise zu zeichnen. (Fig. 197 u. 198.)

Hat man nach §. 97, 1 und 2 die Polaren mn und m'n' des äußeren

Aehnlichkeitspunktes konstruirt, so sind die Richtungen mm′ und nn′ die äußeren gemeinschaftlichen Tangenten, eben so sind mn′ und m′n die inneren gemeinschaftlichen Tangenten, wenn mn und m′n′ die Polaren des inneren Aehnlichkeitspunktes sind.

2) Die gemeinschaftlichen Tangenten zweier Kreise OO′ zu zeichnen, wenn die Potenzlinie MN derselben bekannt ist. (Fig. 200.)

Dieser Fall, besonders vortheilhaft bei Schnittkreisen, gestattet die abgekürzte Konstruktion der Polaren von Nro. 4 und 5, sonst wie Nro. 1.

3) Ohne Benützung der Potenzlinie können die gemeinschaftlichen Tangenten zweier gegebenen Kreise O und O′ auf folgende Art gezeichnet werden. (Fig. 205.)

Man zeichne zuerst zwei Hilfskreise, von welchen der erste aus O mit der Differenz der Halbmesser $OC = OB - BC = OB - O'A'$, und der andere über OO′ als Durchmesser konstruirt ist, und ziehe sodann durch die Schnittpunkte D und E dieser Hilfskreise in dem Kreis O die Halbmesser OF und OG, und in dem Kreis O′ die Halbmesser $O'F' \parallel OF$, $O'G' \parallel OG$, so sind die Richtungen FF′ und GG′ die gesuchten gemeinschaftlichen äußeren Tangenten. Hätte man statt der Differenz die Summe der Halbmesser der gegebenen Kreise genommen, sonst aber das gleiche Verfahren eingehalten, so wäre man zu den gemeinschaftlichen inneren Tangenten gelangt.

Sechstes Buch.

Von der Kreisberührung.

---

§. 99.

Die Regeln über die Kreisberührung sind wegen ihrer häufigen Anwendung in der gothischen Ornamentik für den Zeichner von besonderer Wichtigkeit. Dieselben sind zwar durch die Entdeckungen der neueren Geometrie dem Prinzip nach zu einem völligen Abschluß gekommen, allein in ihrer Anwendung auf die besonderen Fälle sind immer noch namhafte Lücken vorhanden. Um dieselben auszufüllen und dem Zeichner in allen Fällen das bequemste Verfahren anzugeben, wurde diesen Konstruktionen ein besonderes Buch gewidmet, in welchem die einfacheren Fälle, die verwickelteren, und ein Ausnahmefall, wo unzugängliche Punkte auftreten und den gewöhnlichen Gang der Konstruktion unterbrechen, besonders behandelt werden. Es handelt sich bei diesen Konstruktionen um einen Kreis, welcher drei andere gegebene Kreise oder auch nur zwei Kreise berühren soll, wo aber in letzterem Fall der Mittelpunkt in einer gegebenen Geraden liegt.

Die große Mannigfaltigkeit der einzelnen Fälle, welche hiebei unterschieden werden müssen, beruht theils auf dem Größenverhältniß der Halbmesser, theils auf der gegenseitigen Lage der gegebenen Kreise. Die Kreise können gleich oder ungleich sein, sie können extreme Maße annehmen, wodurch sie in Form von Punkten oder geraden Linien erscheinen; sie können sich schneiden, berühren, aus oder in einander liegen, und dabei können ihre Mittelpunkte nur zu zwei oder zu drei in einer Richtung liegen. Jede dieser Verschiedenheiten übt einen bemerkenswerthen Einfluß auf die

Konstruktion des Berührungskreises aus, und macht oft die Anwendung neuer Hilfsmittel nothwendig.

A. Die einfacheren Fälle der Kreisberührung.

§. 100.

Die einfachsten Fälle der Kreisberührungsaufgaben können schon mit den ersten Anfangsgründen der Geometrie gelöst werden. Die Sätze, welche hiebei in Anwendung kommen, sind:

a) Wenn ein Kreis eine Gerade in einem gegebenen Punkt berührt, so liegt sein Mittelpunkt auf der Senkrechten, welche in jenem Punkt der Geraden errichtet wird.

b) Wenn zwei Kreise sich berühren, so liegen die Mittelpunkte derselben mit ihrem Berührungspunkt in einer Richtung.

c) Wenn ein Kreis durch zwei Punkte geht, so liegt sein Mittelpunkt auf der senkrechten Halbirungslinie der zwischen jenen Punkten liegenden Strecke.

d) Wenn ein Kreis zwei Gerade berührt, so liegt sein Mittelpunkt auf der Halbirungslinie des Winkels dieser Geraden.

Vermittelst dieser Sätze können folgende Kreisberührungsaufgaben gelöst werden.

1) Aus einem Punkt einer gegebenen Geraden VW einen Kreis zu beschreiben, welcher durch zwei gegebene Punkte O und O′ gehe.

Die senkrechte Halbirungslinie RS der Strecke OO′ convergirt mit VW in dem Mittelpunkt I des gesuchten Kreises (c).

2) Aus einem Punkt einer gegebenen Geraden VW einen Kreis zu beschreiben, welcher zwei gegebene Geraden MN und RS berühre.

Die Halbirungslinie AB des Winkels MAR der gegebenen Geraden convergirt mit VW in dem Mittelpunkt des gesuchten Kreises I (d). Es gibt zwei entsprechende Berührungskreise.

3) Einen Kreis zu zeichnen, der durch drei nicht in einer Richtung liegende Punkte O, O′ und O″ gehe. (Fig. 206.)

Die senkrechten Halbirungslinien MN, RS der Strecken OO′ und O′O″ convergiren im Mittelpunkt I des gesuchten Kreises (c).

4) Einen Kreis zu zeichnen, der drei gegebene Richtungen MN, RS und VW, die nicht in einem Punkt convergiren und auch nicht parallel sind, berühre. (Fig. 207.)

Die Halbirungslinien der Winkel des Dreiecks ABC, welches von den gegebenen Richtungen gebildet wird, und diejenigen seiner Außenwinkel, convergiren in 4 Punkten, I, I′, I″, I‴, welches die Mittelpunkte ebensovieler der Aufgabe genügender Kreise sind (d).

5) Einen Kreis zu zeichnen, der eine gegebene Gerade MN in einem gegebenen Punkt A berühre und noch durch einen gegebenen Punkt B gehe. (Fig. 208.)

Die senkrechte Halbirungslinie der Strecke AB und die in A auf MN errichtete Senkrechte AC convergiren in dem Mittelpunkt I des gesuchten Kreises.

Ohne Zirkel kann der Mittelpunkt I auch dadurch gefunden werden, daß man $AC \perp MN$, $BC \perp AB$, $CD \parallel AB$ und $AD \parallel BC$ und noch die Diagonale BD des Rechtecks ABCD zieht. Die Diagonalen AC und BD convergiren in dem Mittelpunkt I des gesuchten Kreises.

6) Einen Kreis zu zeichnen, der zwei gegebene Gerade MN und RS, und zwar die erste in einem gegebenen Punkt A berühre. (Fig. 209.)

Die Halbirungslinien der Winkel, welche die gegebenen Geraden an ihrem Convergenzpunkt B machen, und eine in A auf MN errichtete Senkrechte convergiren in den Mittelpunkten I und I′ zweier Kreise, die der Aufgabe genügen (d).

7) Einen Kreis zu zeichnen, der einen gegebenen Kreis O in einem gegebenen Punkt A berühre und durch einen gegebenen Punkt O′ gehe. (Fig. 210.)

Die Richtung des Halbmessers OA und die senkrechte Halbirungslinie RS der Strecke AO′ convergiren in dem Mittelpunkt I des gesuchten Kreises (b, c).

101.

Wenn ein Kreis von einer Geraden berührt und von einer anderen Geraden geschnitten wird, so ist die Strecke zwischen dem Convergenzpunkt der Geraden und dem Berührungspunkt der Tangente, das geometrische

Mittel zwischen den Abschnitten der Sekante die zwischen diesem Convergenzpunkt und den Schnittpunkten mit der Kreislinie liegen. Dieser Satz der Kreislehre dient zur Auflösung folgender Aufgaben über die Kreisberührung:

1) Einen Kreis zu zeichnen, der durch zwei gegebene Punkte O und O′ gehe und noch eine gegebene Gerade MN berühre. (Fig. 211.)

Hat man den Convergenzpunkt Q der Richtung OO′ mit der Geraden MN und das geometrische Mittel QA zwischen QO und QO′ nach §. 59, 2 gesucht und von Q aus QB = QB′ = QA auf der Geraden MN aufgetragen, so ist B, sowie B′, der Berührungspunkt eines Kreises, der der Aufgabe genügt. Zwei Gerade, von welchen die eine MN in B oder B′ senkrecht schneidet, und die andere OO′ senkrecht halbirt, convergiren in den Mittelpunkten I und I′ zweier der Aufgabe genügender Kreise.

2) Aus einem Punkt einer gegebenen Geraden MN einen Kreis zu beschreiben, der eine andere gegebene Gerade RS berühre und durch einen gegebenen Punkt O gehe. (Fig. 212.)

Nachdem man für die Symmetrieaxe MN den zu O zugeordneten Punkt O′ bestimmt hat, zeichne man nach Nro. 1 einen Kreis, welcher durch O und O′ geht und RS berührt, so wird der Mittelpunkt desselben auf MN liegen und der Kreis hat also die verlangte Beschaffenheit.

3) Einen Kreis zu zeichnen, welcher zwei gegebene Gerade MN und RS berühre und durch einen gegebenen Punkt O gehe. (Fig. 213.)

Nachdem man die Halbirungslinie AW des gegebenen Winkels RAM, in dessen Feld der Punkt O liegt, gezogen hat, suche man nach Nro. 2 einen Kreis der, aus einem Punkt von AW beschrieben, die Gerade MN berühre und durch O gehe, so wird derselbe auch RS berühren und also der Aufgabe genügen.

§. 102.

Vermittelst der Beziehungen der zwei ähnlichen Systeme, die in einem Aehnlichkeitspunkt zweier Kreise ihr Centrum haben, können folgende Aufgaben über die Kreisberührungen aufgelöst werden:

1) Einen Kreis zu zeichnen, der zwei gegebene Kreise O und O', und zwar den ersten in einem gegebenen Punkte A gleichartig berühre. (Fig. 214.)

Ein mittelst der parallelen und gleichgerichteten Halbmesser OA und OA' gezogener äußerer Aehnlichkeitsstrahl schneidet den Kreis O' zum zweiten mal in einem Punkt B; die Halbmesser OA und O'B convergiren in dem Mittelpunkt I des gesuchten Berührungskreises. — Weil nämlich das Dreieck IAB dem Dreieck O'A'B ähnlich und das letztere gleichschenklig ist, so muß auch das erstere gleichschenklig sein, folglich IA = IB, im Uebrigen siehe §. 100, d.

2) Der gesuchte Kreis in Nro. 1 soll die Kreise O und O' ungleichartig berühren. (Fig. 215.)

Der Aehnlichkeitsstrahl AA' muß in diesem Fall ein innerer sein, sonst Alles wie in Nro. 1.

3) Einen Kreis zu zeichnen, der eine gegebene Gerade MN in einem gegebenen Punkte A und noch einen gegebenen Kreis O von außen berühre. Sodann soll noch ein zweiter solcher Kreis gezeichnet werden, der jedoch O von innen berühre. (Fig. 216.)

Nachdem man AB ⊥ MN und in gleichem Sinn den Halbmesser OC || AB' und hierauf den inneren Aehnlichkeitsstrahl AC gezogen hat, welcher den Kreis O zum zweiten mal in D schneidet, so convergirt die Richtung des Halbmessers OD mit AB' im Mittelpunkt des gesuchten Berührungskreises I. Der Mittelpunkt des zweiten Berührungskreises wird ganz auf die gleiche Weise gefunden, wenn man den mit AB parallelen Halbmesser OC' in entgegengesetztem Sinne zieht und auf den äußeren Aehnlichkeitsstrahl AC' übergeht.

4) Einen Kreis zu zeichnen, der einen gegebenen Kreis O in einem gegebenen Punkt A von außen und noch eine gegebene Gerade MN berühre; sodann noch einen zweiten solchen Kreis der in A eine Berührung von innen hervorbringe. (Fig. 217.)

Nachdem man in einer mit MN divergirender Richtung den Halbmesser OC ⊥ MN und sodann den Aehnlichkeitsstrahl CA gezogen hat, welcher MN in B schneidet, so errichte man in B auf MN eine Senkrechte, so wird sie mit der Richtung des Halbmessers OA im Mittelpunkt I des

ersten verlangten Kreises convergiren. Durch den entgegengesetzt gerichteten Halbmesser OC' und den äußeren Aehnlichkeitsstrahl AB'C' gelangt man zum zweiten gesuchten Kreis I'.

5) Aus einem Punkt einer gegebenen Geraden VW einen Kreis zu beschreiben, welcher eine gegebene Gerade MN und noch einen gegebenen Kreis O von außen berühre. (Fig. 218.)

Man ziehe mit MN eine parallele Tangente M'N' auf der entgegengesetzten Seite des Kreises, und durch O nach eben dieser Richtung OW' || VW; verbinde den Convergenzpunkt P' dieser Richtungen mit dem Convergenzpunkt P der gegebenen Richtungen, so sind P und P' zwei homologe Punkte zwischen dem gegebenen und dem gesuchten Kreis für ihren inneren Aehnlichkeitspunkt, welcher zugleich ihr Berührungspunkt ist (§. 90, 2). Der Aehnlichkeitsstrahl PP' geht also durch den Berührungspunkt A des gesuchten Kreises, und der Halbmesser OA convergirt mit VW in dem Mittelpunkt I desselben.

Der andere Schnittpunkt B' und die Richtung OB' würde noch zu einem zweiten Kreise I' führen, der ebenfalls der Aufgabe genügte. Hätte man eine Berührung von innen verlangt, so wäre die Tangente auf der anderen inneren Seite mit MN parallel zu ziehen gewesen, und man hätte ebenfalls zwei entsprechende Berührungskreise gefunden.

6) Einen Kreis zu zeichnen, der zwei gegebene Geraden MN und RS auf der inneren Seite und außerdem noch einen gegebenen Kreis von außen berühre. (Fig. 219.)

Nachdem man wie in der vorigen Aufgabe auf der äußeren Seite des Kreises O die Tangenten M'N' || MN, R'S' || RS und hierauf die homologen Convergenzpunkte P und P' dieser Linienpaare, durch die Gerade PP' und dadurch den Berührungspunkt A des Kreispaares O und I bestimmt hat, darf man nur noch den Convergenzpunkt I suchen zwischen der Richtung des Halbmessers OA und einer durch P mit OP' gezogenen Parallelen. Dieser Punkt I, homolog dem Punkt O, ist der Mittelpunkt des gesuchten Kreises. Der Schnittpunkt B zwischen PP' und dem Kreis O führt noch zu einem zweiten der Aufgabe entsprechenden Kreise.

Wäre eine Berührung von innen gefordert, so müßten die Tangenten auf der inneren Seite des Kreises O gezogen werden.

§. 103.

Schon die bisherigen Fälle der Kreisberührung finden einige Anwendung in der gothischen Ornamentik, wie folgende Beispiele zeigen:

1) In einen beliebigen Spitzbogen ABC einen Kreis zu zeichnen, der die Seiten und die Grundlinie zugleich berühre. (Fig. 220.)

Der gesuchte Kreis berührt die Grundlinie offenbar in ihrer Mitte D, welche durch die Höhe CD bestimmt wird; man hat also eine Anwendung von §. 102, 3 vor sich. Auf ihre einfachste Art zurückgeführt, nimmt die Konstruktion folgende Gestalt an: Ziehe im Kreis O′ den Halbmesser O′E′ || CD, suche den Convergenzpunkt F von E′D und BC und ziehe den Halbmesser OF, so bestimmt er auf CD den Mittelpunkt I des gesuchten Kreises.

2) Ueber der Grundlinie AB des Spitzbogens ABC ist ein Halbkreis gezeichnet; man soll über demselben einen Berührungskreis einzeichnen. (Fig. 221.)

Der gesuchte Kreis wird den Halbkreis in dem Punkt E berühren, durch welchen die Höhe CD geht. Man zeichne daher nach §. 102, 2 einen Kreis, welcher den Halbkreis in E von außen und außerdem noch den Kreis O′ von innen berührt; so wird derselbe der Aufgabe genügen.

3) Ueber den Halbmessern AO und OB eines Halbkreises O sind wieder Halbkreise gezeichnet, man soll einen Kreis zeichnen, welcher diese drei Halbkreise berühre. (Fig. 222.)

Der Halbkreis O wird offenbar in dem Punkt C des senkrechten Halbmessers OC berührt, wenn man also nach §. 102, 2 einen Kreis zeichnet, welcher den Kreis O in C und den Kreis O″ berührt, so erfüllt er die Aufgabe. Der Aehnlichkeitsstrahl CC′, welcher die Endpunkte der parallelen entgegengesetzt gerichteten Halbmesser OC und OC′ verbindet, liefert den Berührungspunkt D auf dem Kreis O′.

4) Einen Kreis zu zeichnen, welcher den Halbmesser und den Bogen eines gegebenen Kreisausschnittes AOB berühre. (Fig. 223.)

Der Halbmesser OC′, welcher den Winkel AOB halbirt, bezeichnet den Berührungspunkt C des Kreisbogens AB. Zeichnet man daher nach

§. 102, 4 einen Kreis, welcher den Kreis O in dem Punkte C und außerdem noch die Richtungen OA berührt, so genügt derselbe der Aufgabe. Wenn OD⊥OA und die Richtung CD gezogen, und in dem Convergenzpunkt E dieser Linien in E auf EA eine Senkrechte errichtet wird, so bezeichnet sie auf OC den Mittelpunkt I des gesuchten Kreises.

5) Ein berührendes Vierblatt in einen gegebenen Kreis O zu zeichnen. (Fig. 224.)

Hat man durch zwei senkrechte Durchmesser AB und CD den Kreis O in 4 Quadranten getheilt, und nach Nro. 4 Berührungskreise I, I′, I″ und I‴ in dieselben eingezeichnet, so setzen sie das verlangte berührende Vierblatt zusammen.

Anm. Auf ähnliche Weise kann jedes berührende Vielblatt in einen gegebenen Kreis O gezeichnet werden.

6) In einen Spitzbogen ABC einen berührenden Doppelkreis zu zeichnen. (Fig. 225.)

Ein Kreis des Doppelkreises muß die Grundlinie AB, die Höhe CD und den Kreis O berühren und kann also nach §. 101, 6 gezeichnet werden. Der Convergenzpunkt F der Tangenten EF || CD, GF || AB mit D verbunden, bestimmt auf AC den Berührungspunkt H. Der Halbmesser OH convergirt mit DI || O′F in dem Mittelpunkt des gesuchten Kreises I.

7) In einen Kreisabschnitt ABC einen berührenden Doppelkreis einzuzeichnen. (Fig. 226.)

Offenbar wesentlich dieselbe Aufgabe wie Nro. 6, da die Hälfte BCD des Abschnitts der Hälfte ADC des Spitzbogens gleich ist.

B. Verwickeltere Fälle der Kreisberührung.

§. 104.

Zu den verwickelteren Konstruktionen der Kreisberührung müssen diejenigen gerechnet werden, welche ohne Berücksichtigung ihrer Potenzlinie nicht zu Ende geführt werden können. Wenn man freilich die Konstruktionen von einem allgemeineren Standpunkt aus betrachtet, so findet sich, daß die Potenzlinie geradezu bei allen Berührungsaufgaben auch bei den allereinfachsten benützt wird. Bei gleichen Kreisen ist nämlich die senkrechte Halbirungslinie ihrer Centraldistanz zugleich ihre Potenzlinie. Sind die Kreise unendlich klein, daß sie sich auf Punkte reduziren, so ist also auch

die senkrechte Halbirungslinie der zwischen ihnen liegenden Strecke nichts anderes als ihre Potenzlinie. Schneiden sich zwei gleiche Kreise, so werden sie von ihrer gemeinschaftlichen Sehne unter gleichen Winkeln geschnitten, oder ihre Potenzlinie halbirt den Winkel, unter welchem sich zwei gleiche Kreise schneiden. Setzt man nun für die zwei gleichen Kreise unendlich große Kreise, welche in Form zweier sich schneidenden Geraden erscheinen, so muß die Halbirungslinie ihres Winkels ebenfalls als ihre Potenzlinie betrachtet werden.

Will man aber die Potenzlinie zwischen einem endlichen Kreis und einer Geraden zeichnen, so findet man, wie später §. 114, 6 gezeigt werden wird, daß die Potenzlinie mit der gegebenen Geraden zusammenfällt. Wenn man nun diese Beziehungen kennt, so wird man finden, daß auch unter den einfacheren Konstruktionen der Kreisberührung keine ist, welche nicht von der Potenzlinie Gebrauch machte. Allein andererseits haben die dort gebrauchten Hilfslinien auch noch eine andere von der Potenzlinie unabhängige Bedeutung, welche, wie sich gezeigt hat, für sich schon, ohne die allgemeinen Beziehungen der Potenzlinien zu kennen, zur Durchführung der Konstruktion genügt. Diese einfache Form der Potenzlinie ist nun in den folgenden Aufgaben nicht mehr zu finden; dieselben können also auch nicht gelöst werden ohne die allgemeinen Beziehungen der Potenzlinie zu kennen, und setzen insofern neue erweiterte Kenntnisse voraus.

Die einfacheren wie die verwickelteren Konstruktionen des Berührungskreises haben das gemeinschaftlich, daß von den Eigenschaften der Aehnlichkeitspunkte Gebrauch gemacht werden muß. Auch der Gebrauch der Potenzlinie beschränkt sich darauf, daß man weiß, welche Stellung die Potenzlinie der gegebenen Kreise in den ähnlichen Systemen der Berührungskreise einnimmt, oder also, daß man die Potenzlinie in die zwei ähnlichen Systeme der Berührungskreise einzureihen weiß. Kennt man die Gesetze dieser Einreihung, so ist der eigentliche Verlauf der Konstruktion ganz mit demjenigen identisch, der auch im vorausgehenden Abschnitt eingehalten wurde; daß man nämlich einen Aehnlichkeitsstrahl durch homologe Punkte, und durch den zugehörigen Aehnlichkeitsstrahl den Berührungspunkt bestimmt.

§. 105.

Wie sich die Potenzlinie zweier Kreise in die ähnlichen Systeme ihrer Berührungskreise einfügt, ist in folgenden Sätzen behandelt:

1) Wenn zwei Kreise O und O′ von einem dritten Kreis I gleichartig berührt werden, so liegen ihre zwei Berührungspunkte A, B auf einem äußeren Aehnlichkeitsstrahl der berührten Kreise O und O′. (Fig. 214.)

Weil der Punkt B ein innerer Aehnlichkeitspunkt der Kreise O′ und I ist, so ist die Richtung AB ein innerer Aehnlichkeitsstrahl dieses Kreispaares, welcher den Kreis O′ noch in einem zweiten Punkt A′ schneidet, der dem Punkt A homolog ist. Die Halbmesser O′A′ und IA sind also parallel und entgegengesetzt gerichtet (§. 91, 1). Es sind aber auch die Halbmesser OA und IA auf einer Geraden liegend und entgegengesetzt gerichtet. Es folgt hieraus, daß die Halbmesser O′A′ und OA parallel und gleich gerichtet sind, und daß also AA′ ein äußerer Aehnlichkeitsstrahl der berührten Kreise O und O′ ist.

2) Wenn zwei Kreise O und O′ von einem dritten Kreis I ungleichartig berührt werden, so liegen ihre zwei Berührungspunkte A, B′ auf einem inneren Aehnlichkeitsstrahl der berührten Kreise. (Fig. 215.)

Weil der Kreis O durch den Kreis I von innen und O′ von außen berührt werden soll, so ist B′ ein innerer Aehnlichkeitspunkt der Kreise I und O′ (§. 90, 2), also sind die Halbmesser O′A′ und IA′ parallel und entgegengesetzt gerichtet. Der Punkt A dagegen ist ein äußerer Aehnlichkeitspunkt der Kreise O und I, die in gleicher Geraden liegenden Halbmesser IA und OA sind also auch gleich gerichtet. Mithin sind die Halbmesser O′A′ und IA parallel und entgegengesetzt gerichtet und folglich ist AA′ ein innerer Aehnlichkeitsstrahl der Kreise O und O′.

3) Wenn zwei Kreise O und O′ von zwei anderen Kreisen I und I gleichartig berührt werden, so ist die Potenzlinie des einen Kreispaars ein äußerer Aehnlichkeitsstrahl des anderen Kreispaars. (Fig. 227.)

Wie die Kreise O und O′ von den Kreisen I und I′ gleichartig berührt werden, so werden auch die letzteren I und I′ von den ersteren O und O′ gleichartig berührt, und wie also die Sehnen AB′ und CD′ äußere Aehnlichkeitsstrahlen der Kreise O und O′ sind und in dem äußeren Aehnlichkeitspunkt P derselben convergiren, so sind auch AC und B′D′ Aehnlichkeitsstrahlen der Kreise I und I′ und convergiren in dem äußeren

Aehnlichkeitspunkt P′ derselben. Nun bestimmen die Aehnlichkeitsstrahlen PB′ und PD′ bei ihrer Verlängerung in dem Kreis O die den Punkten B′ und D′ homologen Punkte B und D, und es ist BD || B′D′ (§. 91, 1), also

$$\angle B'D'P = \angle BDP,$$

da aber ABCD ein Viereck im Kreis ist, so ist auch

$$\angle BDP = \angle B'AC,$$

mithin

$$\angle B'D'P = \angle B'AC.$$

Dieses Resultat zeigt, daß auch AB′D′C ein Viereck ist, um welches ein Kreis Q beschrieben werden kann. Dieser Kreis Q ist aber ein Schnittkreis der Kreise O und O′, die gemeinschaftlichen Sehnen AC und B′D′ convergiren also in einem Potenzpunkt P′ dieser Kreise (§. 93, 2). Oder die Potenzlinie der Kreise O und O′ geht durch den Aehnlichkeitspunkt P′ der Kreise I und I′. Aus demselben Grund geht auch die Potenzlinie der Kreise I mit I′ durch den äußeren Aehnlichkeitspunkt P der Kreise O und O′. Die Potenzlinie jedes Kreispaars ist also ein äußerer Aehnlichkeitsstrahl des anderen Kreispaars.

4) Wenn zwei Kreise O und O′ von zwei anderen Kreisen I und I′ ungleichartig berührt werden, so ist die Potenzlinie des einen Kreispaares ein innerer Aehnlichkeitsstrahl des anderen Kreispaares. (Fig. 228.)

Die Beweisführung für diesen Fall ist so übereinstimmend mit derjenigen des vorausgehenden Satzes, daß bei der entsprechenden Bezeichnung beider Figuren jene Beweisführung auch unmittelbar hier anwendbar wird, wenn man statt der Ausdrücke „äußere Aehnlichkeitsstrahlen und äußerer Aehnlichkeitspunkt" innere Aehnlichkeitsstrahlen und innerer Aehnlichkeitspunkt setzt.

5) Wenn zwei Kreise O und O′ von einem dritten Kreis I″ gleichartig berührt werden, so ist die Potenzlinie der Kreise O und O′ eine Richtung des Kreises I″, welche jeder Polaren des äußeren Aehnlichkeitspunktes in den berührten Kreisen homolog ist. (Fig. 229.)

Beschreibt man über dem Abschnitt A′B zwischen den Kreisen O und O′ als Durchmesser einen Kreis I′, so ist auch er wie I″ ein gleichartiger Berührungskreis der Kreise O und O′. Die Potenzlinie MN dieser Kreise ist also ein äußerer Aehnlichkeitsstrahl der Berührungskreise I″ und I′

(Nro. 3). Zieht man daher im Kreis I″ den Durchmesser A″B″ || A′B, so werden diese homologen Linien der Kreise von ihrem Aehnlichkeitsstrahl MN proportional getheilt (§. 91, 1), d. h. es ist

$$A'K : BK = A''K'' : B''K''.$$

Nun weiß man aber aus §. 96, 1, daß die Polare mn des äußeren Aehnlichkeitspunkts der Kreise O und O′ den Durchmesser AB des Kreises O so theilt, daß $Ak : Bk = A'K : BK$,

hieraus folgt $Ak : Bk = A''K'' : B''K''$.

Die Punkte k und K″ sind also auch homologe Punkte der Kreise O und K″ (§. 91, 3), und die parallelen Richtungen MN und mn sind homologe Linien eben dieser Kreise (§. 91).

6) Wenn zwei Kreise O und O′ von einem dritten Kreis I″ ungleichartig berührt werden, so ist die Potenzlinie der Kreise O und O′ eine Richtung des Kreises I″, welche jeder Polaren des inneren Aehnlichkeitspunktes in den berührten Kreisen homolog ist. (Fig. 230.)

Beschreibt man über dem Abschnitt AA′ der gleichnamigen Punkte als Durchmesser einen Kreis I, so ist auch er wie I″ ein ungleichartiger Berührungskreis der Kreise O und O′. Die Potenzlinie MN dieser Kreise ist also innerer Aehnlichkeitsstrahl der Berührungskreise I und I″ (Nro. 4). Zieht man daher im Kreis I″ den Durchmesser A″B″ || AA′, so werden diese homologen Linien der Kreise von ihrem Aehnlichkeitsstrahl MN proportional getheilt (§. 91, 1), d. h. es ist

$$AK : A'K = A''k'' : B''k''.$$

Nun weißt man aber aus §. 96, 2, daß die Polare mn des inneren Aehnlichkeitspunkt der Kreise O und O′ den Durchmesser des Kreises so theilt, daß $Ak : Bk = AK : A'K$,

hieraus folgt $Ak : Bk = A''k'' : B''k''$.

Die Punkte k und k″ sind also auch homologe Punkte der Kreise O und I″ für ihren inneren Aehnlichkeitspunkt (§. 91, 3) und die parallelen Richtungen MN und mn sind homologe Linien eben dieser Kreise für denselben Aehnlichkeitspunkt.

Anm. Die Figuren sind der leichteren Orientirung halber durchaus für auseinanderliegende Kreise O und O′ gezeichnet, die Sätze und Beweisführungen sind aber auch für ineinanderliegende Kreise unverändert giltig.

§. 106.

Die Konstruktion des Berührungskreises nimmt ihre einfachste Form an wenn die gegebenen Kreise selbst schon sich berühren. In diesem Fall, wo übrigens wenigstens zwei Berührungen zwischen den gegebenen Kreisen vorkommen müssen, reichen schon die Sätze 3 und 4 des vorigen Paragraphen aus. Da dieser Fall in der gothischen Ornamentik nicht selten Anwendung findet, so ist seine besondere Behandlung geboten. Folgende Aufgaben werden dieß zeigen.

1) Es sind drei Kreise O, O′ und O″ gegeben, die einander paarweise in den zwei Punkten A und B von außen berühren, man soll ihre Berührungskreise zeichnen. (Fig. 231.)

Die Richtung AB ist ein äußerer Aehnlichkeitsstrahl der Kreise O und O″ (§. 105, 1), und convergirt also mit ihrer Centralen im äußeren Aehnlichkeitspunkt P derselben. Durch denselben Punkt P geht aber auch die Potenzlinie der Kreise O′ und I (§. 94, 2), welche, weil es Berührungskreise sind, mit der Tangente ihres Berührungspunkts C′ zusammenfällt. Construirt man also über O′P als Durchmesser einen Kreis, so sind seine Schnittpunkte C′ und D′ mit dem Kreis O′ zugleich die Punkte, in welchen dieser von den gesuchten Kreisen I und I′ berührt wird. Die Kreise selbst können, nachdem ihre Berührungspunkte gefunden worden, nach §. 102, 1 bestimmt werden.

2) Drei Kreise O, O′, O″, der erstere durch die zwei letzteren von innen berührt, sind gegeben; man soll die gemeinschaftlichen Berührungskreise zeichnen. (Fig. 232.)

Die Konstruktion der Berührungskreise stimmt so sehr mit derjenigen der vorausgehenden Aufgabe überein, daß weitere Erklärung überflüssig scheint.

3) Ueber den zwei ungleichen Abschnitten AC und BC des Durchmessers AB eines Halbkreises O sind selbst wieder Halbkreise O′ und O″ beschrieben; man soll einen Kreis zeichnen, der die drei gegebenen Halbkreise berühre. (Fig. 233.)

Hat man mittelst zweier paralleler und entgegengesetzter Halbmesser OD und O′D′ den inneren Aehnlichkeitspunkt 𝔓 der Kreise O und O′ bestimmt, so darf nur über O″𝔓 einen Halbkreis zeichnen, so wird derselbe

auf dem Kreis O'' den Punkt E'' angeben, in welchem derselbe von dem gesuchten Kreis I berührt wird. (Vergl. Nro. 1.)

4) Ein Kreis O wird von einem zweiten Kreis O' in A und von einer Geraden MN in B berührt; man soll einen dritten Kreis zeichnen, welcher die drei gegebenen Stücke berühre. (Fig. 234.)

Die Richtung AB bestimmt auf dem Umfang des Kreises O' unmittelbar den Aehnlichkeitspunkt D' zwischen O' und MN (derselbe liegt auch auf einem zu MN senkrechten Durchmesser des Kreises O', was zur Probe dienen kann). Beschreibt man also über OD' als Durchmesser einen Kreis, so bezeichnet er auf dem Kreis O die Berührungspunkte C und C' zweier Kreise I, I', welche der Aufgabe genügen, und die nach §. 105, 1 gezeichnet werden können.

5) Ueber der Höhe CD eines gegebenen Kreisabschnittes ABC als Durchmesser ist ein Kreis O' beschrieben; man soll zu beiden Seiten des letzteren noch zwei Kreise einzeichnen, welche den Kreis O' sowie Bogen und Grundlinie des Abschnittes berühren. (Fig. 235.)

Die Richtung der Höhe CD bestimmt auf dem Kreis O des Abschnitts ABC den Aehnlichkeitspunkt E zwischen O und AB; ein über O'E als Durchmesser konstruirter Kreis bezeichnet also auf dem Umfang des Kreises O' die Berührungspunkte D und D' der gesuchten Kreise, welche nach §. 105, 4 gezeichnet werden können.

§. 107.

Wenn unter den gegebenen Stücken, welche den Berührungskreis bestimmen, eine Gerade begriffen ist, so gewinnt die Konstruktion desselben gewisse Eigenthümlichkeiten und Einfachheit. Es folgen daher zunächst diejenigen Aufgaben, welche diesen Vortheil gewähren.

1) Aus einer gegebenen Geraden VW einen Kreis zu beschreiben der zwei gegebene Kreise O und O' gleichartig berühre. (Fig. 236.)

Konstruire die Potenzlinie MN der Kreise O und O', sowie ihre Polare mn des äußeren Aehnlichkeitspunkts und ziehe den Halbmesser OC ∥ VW, so sind nach §. 105, 5 die Linien MN und mn, sowie nach

§. 91, 4 die Linien OC und VW homologe Linienpaare des Kreises O und des zu zeichnenden Berührungskreises I; es ist also auch der Convergenzpunkt Q von MN und VW homolog dem Convergenzpunkt q von mn und OC (§. 91, 2). Die Richtung Qq ist also ein Aehnlichkeitsstrahl des Berührungskreispaares und geht durch den Aehnlichkeitspunkt D der zugleich der Berührungspunkt ist.

Weil die Gerade Oq den Kreis O in zwei Punkten D und E schneidet, so bestehen zwei Kreise welche der Aufgabe genügen. Die Richtungen der Halbmesser OD und OE dieser Punkte bestimmen auf VW die Mittelpunkte I und I′ dieser Kreise.

2) Aus einem Punkt der gegebenen Geraden VW einen Kreis zu beschreiben, welcher einen gegebenen Kreis O berühre und noch durch einen gegebenen Punkt O′ gehe. (Fig. 237.)

Die Auflösung dieser Aufgabe unterscheidet sich kaum von der vorausgehenden, indem sie nur ein anderes Verfahren zur Konstruktion der Potenzlinie MN und der Polare mn erfordert, wie solches §. 97, 3 u. 6 angegeben ist.

3) Einen Kreis zu zeichnen der zwei gegebene Kreise O und O′ und eine gegebene Gerade RS gleichartig berühre. (Fig. 238.)

Zieht man an den Kreis O die Tangente rs || RS, so sind, weil auch RS den gesuchten Kreis I berühren soll, nach §. 91, 4 diese Linien homologe Stücke der Kreise O und I. Zieht man nun noch die Potenzlinie MN der Kreise O und O′ und die Polare mn ihres äußeren Aehnlichkeitspunktes, so sind auch diese Linien für eben diese Kreise O und I homolog §. 105, 5. Es sind also auch die Convergenzpunkte Q und q dieser Linienpaare homolog. Die Richtung Qq ist also ein Aehnlichkeitsstrahl der genannten Kreispaare, welcher durch ihren Berührungspunkt geht. Weil die Gerade Qq den Kreis O in zwei Punkten C und D schneidet, so bestehen zwei Kreise, welche der Aufgabe genügen. Die Richtungen der Halbmesser OC und OD bestimmen auf einer Geraden, die man durch Q mit Oq parallel zieht, die Durchmesser I und I′ dieser zwei Kreise, weil auch diese Parallelen homolog sind (§. 91).

Anm. Wenn die Gerade RS einen der gegebenen Kreise schneidet, so existiren nur zwei Kreise welche der Aufgabe entsprechen, die selbst sich auf einen Kreis reduziren können, wenn Qq einen der gegebenen Kreise

berühren sollte. Wenn RS zwischen den Kreisen liegen würde, so wäre gar kein gemeinschaftlicher Berührungskreis möglich. Wenn sie aber keinen der gegebenen Kreise schneidet und beide auf einer Seite läßt, so gibt es zwei Tangenten rs und r's', deren jede zu zwei Berührungskreisen führt, so daß man also vier Kreise erhält, welche alle MN und die Kreise O und O' gleichartig berühren. Ebenso führt die innere Polare mn zu vier Kreisen, welche die Kreise O und O' gleichartig und die Gerade MN berühren.

4) Einen Kreis zu zeichnen, der einen gegebenen Kreis O, eine gegebene Gerade RS berühre und zugleich noch durch einen gegebenen Punkt O' gehe. (Fig. 239.)

Die Auflösung dieser Aufgabe stimmt ganz mit der vorausgehenden überein, nur daß MN und mn nach §. 97, 3 u. 6 behandelt werden müssen.

5) Einen Kreis zu zeichnen, welcher zwei gegebene gleiche Kreise O und O' gleichartig und noch eine gegebene Gerade RS berühre. (Fig. 240.)

Die Potenzlinie MN ist hier die senkrechte Halbirungslinie der Centraldistanz OO', die Polare des äußeren Aehnlichkeitspunktes ist ein Durchmesser DE des Kreises O, welcher mit MN parallel ist. Sonst wie Aufgabe 3.

6) Es soll in der vorausgehenden Aufgabe der Kreis gesucht werden, welcher eine ungleichartige Berührung der gleichen Kreise O und O' vollzieht. (Fig. 241.)

In diesem Fall verschwindet der Vortheil in der Konstruktion der Polaren, welcher in Auf. 5 bestand. Man muß hier die Polare mn nach Aufg. 97, 2 zeichnen, um zum Punkt q zu gelangen und QI || Oq ziehen Sonst wie Aufg. 5.

7) Einen Kreis zu zeichnen, der die Seite AC des Spitzbogens ABC von außen und die Verlängerung der Seite BC von innen und außerdem noch die Richtung der Grundlinien AB berühre. (Fig. 242.)

Die Potenzlinie MN fällt mit der Höhe CQ des Spitzbogens ABC zusammen (§. 92). Der Fußpunkt Q derselben ist zugleich der innere Aehnlichkeitspunkt der Kreise O und O' (§. 90, 1). Die Polare **Mn** desselben geht durch den Punkt D, in welchem eine den Kreis O' in c berührende Tangente die Centralrichtung OO' schneidet (§. 86, 1). Die

Centrale OO′ vertritt die zu berührende Gerade RS. Die Tangente rs || RS des Kreises O convergirt mit MN im Punkt q, welcher dem Punkt Q homolog ist. Da Q zugleich der innere Aehnlichkeitspunkt der Kreise O und O′ ist, so ist qQ nicht nur ein Aehnlichkeitsstrahl der Kreise O und I, sondern auch der Kreise O und O′. Die Schnittpunkte E und F dieser Linie mit den Kreisen O und O sind also die Punkte in welchen sie von I berührt werden. Die Halbmesser OE und O′F convergiren daher in dem Mittelpunkt I des gesuchten Kreises.

§. 108.

Es sind nun noch die Konstruktionen des Berührungskreises übrig, welche keine Vereinfachung darbieten, vorausgesetzt daß man die bisher benützte Methode in Anwendung bringen will.

1) Einen Kreis zu zeichnen, der einen gegebenen Kreis O berühre und noch durch zwei gegebene Punkte O′ und O″ gehe. (Fig. 243.)

Die senkrechte Halbirungslinie RS von O′O″ und der parallele Durchmesser rs im Kreis O sind das eine Paar der homologen Linien der Kreise O und I, das andere Paar MN und mn werden nach §. 97, 6 konstruirt. Die Richtung Qq gibt die Berührungspunkte C und D zweier entsprechenden Berührungskreise, und die Halbmesser OC und OD bestimmen auf RS die Mittelpunkte I und I′ derselben.

Andere Auflösung. (Fig. 244.)

Beschreibe aus einem beliebigen Punkt der senkrechten Halbirungslinie RS von O′O″ einen Kreis, welcher den Kreis O in zwei Punkten C und D schneidet, suche sodann den Convergenzpunkt E zwischen CD und O′O″, beschreibe jetzt über OE als Durchmesser einen Kreis, so wird derselbe den Kreis O in den Berührungspunkten G und F zweier Kreise schneiden, welche der Aufgabe entsprechen. Denn der Punkt E liegt nach §. 93, 2 auf der Potenzlinie der Kreise O und I, die hier ihre gemeinschaftliche Tangente ist.

2) Einen Kreis zu zeichnen, der zwei gegebene Kreise O und O′ gleichartig berühre und noch durch einen gegebenen Punkt O″ gehe. (Fig. 245.)

MN und mn, Potenzlinie und Polare der Kreise O und O′, Rs und rs Potenzlinie und Polare zwischen O und O″, bestimmen die Punkte Q

und q, die Richtung Qq liefert auf O die Berührungspunkte C und D, die Richtungen OC nnd QI || Oq convergiren im Mittelpunkt I eines Berührungskreises, OD und IQ convergiren im Mittelpunkt I′ eines zweiten Berührungskreises.

3) Einen Kreis zu zeichnen, welcher drei gegebene Kreise O, O′ und O″ gleichartig berühre. (Fig. 246.)

Die Potenzlinie MN und die Polare mn des äußeren Aehnlichkeitspunkts der Kreise O und O′, die Potenzlinie RS und die Polare rs des äußeren Aehnlichkeitspunkts der Kreise O und O″ liefern die homologen Punkte Q und q; der Aehnlichkeitsstrahl Qq liefert die Berührungspunkte C und D zweier Berührungskreise, welche der Aufgabe genügen. Die Richtungen des Halbmessers OC und der Geraden QI || Oq führen zum Mittelelpunkt I des einen dieser Kreise, während die Richtung OD mit der Richtung QI im Mittelpunkt I′ des anderen Berührungskreises convergirt.

4) Einen Kreis zu zeichnen, der drei gegebene Kreise O, O′ und O″, und zwar O und O′ gleichartig, O und O″ ungleichartig berühre. (Fig. 247.)

MN und mn sind Potenzlinie und Polare des äußeren Aehnlichkeitspunkts der Kreise O und O′, RS und rs sind Potenzlinie und Polare des inneren Aehnlichkeitspunkts der Kreise O und O″, sonst wie Aufgabe 3.

5) Einen Kreis zu zeichnen, welcher drei Kreise O, O′ und O″ gleichartig berühre, von welchen übrigens O und O′ gleich sind, und O und O″ sich schneiden. (Fig. 248.)

Die Potenzlinie MN ist senkrechte Halbirungslinie von OO′, die Polare mn || MN ist Durchmesser des Kreises O. RS ist gemeinschaftliche Sehne, rs muß nach §. 97, 4 construirt werden, OC und OD convergiren mit MN in den Mittelpunkten I und I′ welche der Aufgabe genügen.

6) Einen Kreis zu zeichnen, der drei gleiche Kreise und zwar O und O′ ungleichartig, O′ und O″ gleichartig berühre. (Fig. 249.)

Die Potenzlinien MN und RS sind die senkrechten Halbirungslinien von OO′ und O′O″, die Polare des äußeren Aehnlichkeitspunkts der Kreise O und O″ ist der Durchmesser r′s′ || RS, die Polare m′n′ des inneren

Aehnlichkeitspunkts der Kreise O und O′ muß nach §. 97, 5 konstruirt werden. Die Richtung Oq der Convergenzpunkte dieser Linienpaare schneidet den Kreis O′ in den Punkten C und D; die Halbmesser O′C und O′D convergiren mit RS in den Mittelpunkten I und I′ der gesuchten Berührungskreise.

C. Unzugängliche Punkte der Kreisberührung.

§. 109.

In den zwei vorausgehenden Abschnitten wurde der Berührungskreis dadurch konstruirt, daß man auf den gegebenen Stücken vorerst die Berührungspunkte aufzufinden bestrebt war. Die Potenzlinien und die Polaren der Aehnlichkeitspunkte der gegebenen Kreise boten hiezu ein allgemeines Mittel dar. Allein so sehr dieses Mittel dem Prinzip nach genügt, so wird doch seine Anwendung häufig wenig oder sogar ganz unbrauchbar. Im Wesentlichen besteht es darin, daß der Convergenzpunkt der Potenzlinien zweier Kreispaare, und der Convergenzpunkt zweier Polaren ihrer Aehnlichkeitspunkte mit einander verbunden eine Richtung liefern, welche in einem der Kreise unmittelbar die Berührungspunkte zweier Berührungskreise bestimmt. Die Anwendbarkeit dieses Mittels hängt also von der Convergenz der zwei Potenzlinien und der zwei Polaren ab. Je schwächer die Convergenz dieser Linien ist, desto mehr verschwindet die Anwendbarkeit jenes Mittels; und wenn diese Convergenz endlich aufhört, so hört auch die Anwendbarkeit dieses Mittels auf. Dieser Fall tritt aber in der That ein, wenn die Mittelpunkte der gegebenen Kreise in einer Richtung liegen; denn alsdann sind alle Potenzlinien und alle Polaren der Kreispaare auf der gemeinschaftlichen Richtung ihre Centralen senkrecht, sie sind parallel und die zur Konstruktion unentbehrlichen Convergenzpunkte Q und q rücken in unendliche Entfernung hinaus und werden unzugänglich.

Dieser für die Konstruktion des Berührungskreises ungünstige Fall ist jedoch nicht so selten und er ist gerade derjenige, dem man in der gothischen Ornamentik am häufigsten begegnet. Es ist deßhalb auffallend, daß dieser Fall in den Lehrbüchern der Geometrie nicht beachtet wird, und dieser Mangel erklärt, warum der Zeichner von den Construktionsmethoden derselben gewöhnlich keinen Gebrauch macht, sondern sich nach anderen Hilfsmitteln umsieht.

Nun kann diese Schwierigkeit nach der Regel des §. 84, 4 überwunden werden, allein es kann dieselbe noch besser dadurch beseitigt werden, daß man von der Konstruktion der Berührungspunkte absteht und dafür den Halbmesser des Berührungskreises aufsucht, der in dem erwähnten Fall nach den allgemeinen Regeln des §. 105 eben so leicht gefunden wird, als die Berührungspunkte in den übrigen Fällen. Um jedoch nicht vorzugreifen, mag zunächst in den folgenden Paragraphen die Aufgabe des Berührungskreises von bekanntem Halbmesser behandelt werden.

§. 110.

Man soll einen Kreis von bekanntem Halbmesser ϱ zeichnen, welcher die Eigenschaft hat:

1) daß sein Umfang durch zwei gegebene Punkte O und O′ gehe.

Zwei aus O und O′ mit ϱ beschriebene Kreise schneiden sich im Mittelpunkt I des gesuchten Kreises.

2) daß er zwei gegebene Geraden MN und RS berühre.

Vier in den Entfernungen $QA = QA' = QB'' = QB' = \varrho$ mit MN und RS parallel gezogenen Richtungen convergiren paarweise in den Mittelpunkten I, I′, I″ und I‴ von Kreisen deren jeder der Aufgabe genügt.

3) daß er eine gegebene Gerade MN berühre und durch einen Punkt O gehe.

Eine auf der Seite von O mit MN in der Entfernung $AB = \varrho$ gezogene parallele Richtung und ein aus O mit ϱ beschriebener Kreis convergiren in den Mittelpunkten I und I′ zweier Kreise, welche der Aufgabe genügen.

4) daß er einen gegebenen Kreis O berühre und durch einen gegebenen Punkt O′ gehe.

Ein aus O mit $OB = OA + AB = OA + \varrho$, und ein zweiter aus O′ mit ϱ beschriebener Kreis schneiden sich in den Mittelpunkten zweier Kreise I und I′, welche der Aufgabe genügen. — Die Summe $OB = OA + \varrho$ verwandelt sich in die Differenz $OB = OA - \varrho$, wenn der Punkt O′ innerhalb des Kreises O liegt.

5) daß er zwei gegebene Kreise von außen berühre. (Fig. 250.)

Ein aus O mit $OB = OA + AB = OA + \varrho$ und ein aus O′ mit $O'B' = OA' + A'B' = OA' + \varrho$ beschriebener Kreis schneiden sich in zwei Punkten I und I′, welche Mittelpunkte der gesuchten Kreise sind.

6) daß er zwei gegebene Kreise O und O′ von innen berühre.

Ein aus O mit $OB = AB - OA = \varrho - OA$ und ein von O′ mit $O'B' = A'B' - O'A' = \varrho - O'A'$ beschriebener Kreis schneiden sich in den Mittelpunkten I und I′ zweier Kreise, welche beide der Aufgabe genügen.

7) daß er einen gegebenen Kreis O von außen und einen zweiten gegebenen Kreis von innen berühre. (Fig. 251.)

Ein aus O mit $OB = OA + AB = OA + \varrho$ und ein aus O′ mit $O'B' = A'B' - O'A' = \varrho - O'A'$ beschriebener Kreis schneiden sich in zwei Punkten I und I′, welche die Mittelpunkte der gesuchten Kreise sind.

8) daß er einen gegebenen Kreis O von außen und eine gegebene Gerade MN berühre. (Fig. 252.)

Ein aus O mit $OB = OA + AB = OA + \varrho$ beschriebener Kreis und eine Gerade, welche in der Entfernung $A'B' = \varrho$ auf der Seite von O mit MN parallel gezogen ist, schneiden sich in den Mittelpunkten I und I″ zweier Kreise, welche der Aufgabe genügen.

9) daß er einen gegebenen Kreis O von innen und eine gegebene Gerade MN berühre. (Fig. 253.)

Ein aus O mit $OB = AB - OA = \varrho - OA$ beschriebener Kreis und eine auf der Seite des Kreises O in der Entfernung $A'B' = \varrho$ mit MN parallel gezogene Richtung schneiden sich in den Mittelpunkten I und I′ zweier Kreise, welche der Aufgabe genügen.

§. 111.

Der Halbmesser des Berührungskreises dreier gegebenen Kreise, deren Mittelpunkte O, O′ und O″ in einer Richtung liegen, kann nach folgender Regel gefunden werden (Fig. 254):

Hat man zwischen einem Kreis O und den zwei anderen Kreisen O′ und O″ die Potenzlinien MN und RS gesucht, welche mit der gemeinschaftlichen Centrale in den Punkten K und L

convergiren, und hat man ebenso im Kreise O die betreffenden Polaren mn und rs der Kreispaare O und O′, O und O″ (des inneren oder äußeren Aehnlichkeitspunktes, je nachdem die Berührung eine gleichartige oder ungleichartige sein soll) aufgesucht, welche die Centrale in den Punkten k und l schneiden, so verhält sich der Halbmesser des gesuchten Berührungskreises zum Halbmesser des Kreises O wie KL:kl.

Die Potenzlinie MN des Kreispaars O und O′ ist eine Richtung im Berührungskreis I, welche der Polare mn des entsprechenden Aehnlichkeitspunkts im Kreis O für den Berührungspunkt c homolog ist §. 105, 5 und 6, sie schneidet also einen mit OO′ parallel gezogenen Halbmesser I′A′ in einen Punkt K′, welcher dem Punkt k der Polare mn homolog ist. Ebenso sind die Punkte L′ und l der Kreise I′ und O homolog, welche durch die Potenzlinie RS und die entsprechende Polare rs der Kreise O und O″ auf gleiche Weise bestimmt werden. Nach §. 94, 1 ist also

$$kl : K'L' = OA : I'A',$$

und weil K′L′ = kl ist auch

$$kl : KL = OA : I'A'.$$

Wenn eine ungleichartige Berührung stattfindet, so wird die Polare des inneren Aehnlichkeitspunkts erscheinen und f für k oder l für l stehen, im Uebrigen die Proportion unverändert stehen bleiben.

§. 112.

Die Anwendung der Regel des vorausgehenden Paragraphen kann aus folgenden Beispielen ersehen werden:

1) Zu drei in einer Richtung liegenden Kreisen O, O′ und O″ die gleichartigen Berührungskreise zu zeichnen. (Fig. 254.)

Hat man den Punkt K der Potenzlinie MN zwischen den Kreisen O und O′ und den Punkt L der Potenzlinie RS zwischen den Kreisen O und O″, und ebenso die Polaren mn und rs der äußeren Aehnlichkeitspunkte eben dieser Kreispaare und ihre Schnittpunkte k und l mit der Centralen gezeichnet, so nehme man auf der Polare rs das Stück lH = LK und ziehe die Richtung kH und sodann die Geraden BG || rs, OG || kH, so ist BG der Halbmesser des Berührungskreises I. Denn wegen Aehnlichkeit der Dreiecke klH und OBG, verhält sich

$$kl : Hl = BO : BG,$$

also auch kl : KL = BO : BG.

Zeichnet man nun die Kreise I und I′ nach §. 86, 5 mit dem Halbmesser BG, so daß sie die Kreise O und O″ gleichartig berühren, so werden sie auch den Kreis O′ gleichartig berühren und also der Aufgabe genügen (§. 111).

2) Zu drei in einer Richtung liegenden Kreisen O, O′ und O″ die Berührungskreise zu zeichnen, welche O und O′ ungleichartig, O und O″ gleichartig berühren. (Fig. 255.)

MN, RS und rs mit den Punkten K, L und l wie in der vorausgehenden Aufgabe, dagegen mn mit dem Punkt k zum inneren Aehnlichkeitspunkt gehörig, sonst Alles wie in der vorigen Aufgabe.

3) Drei Kreise O, O′ und O″, die in einer Richtung liegen, sich paarweise schneiden, und von denen zwei, O und O′ gleich sind, sind gegeben; man soll einen Kreis zeichnen, der O und O′ ungleichartig, O und O″ aber gleichartig berühre.*

Die gemeinschaftlichen Sehnen MN und RS der Kreispaare O und O′, O und O″ convergiren mit der Centralen in den Punkten K und L, von welchen K zugleich innerer Aehnlichkeitspunkt der Kreise O und O′ ist; die Polare mn dieses inneren Aehnlichkeitspunkts K im Kreis O liegt außerhalb dieses Kreises und convergirt mit der Centralen in demselben Punkt k, in welchem auch eine in M an den Kreis O gezogene Tangente convergirt (§. 86, 1). Die Polare rs mit dem Punkt l des äußeren Aehnlichkeitspunkts der Kreise O und O″ wird nach §. 97, 4 konstruirt. Nimmt man also auf rs das Stück lH = KL und zieht BG || CH und OG || kH, so ist BG der Halbmesser der gesuchten Berührungskreise I und I′, da

lk : lH = OB : BG oder lk : KL = OB : BG.

4) Einen Kreis zu beschreiben, der zwei gegebene Schnittkreise O und O′ ungleichartig und noch eine auf OO′ senkrechte Gerade MN berühre. (Fig. 256.)

Zieht man durch den äußeren Punkt B des Kreises O eine Parallele mn zu MN, so berührt sie den Kreis O ebenso wie MN den Kreis I berühren soll, es sind also diese Tangenten homologe Linien der Kreise O und I (§. 91, 4); diese Linien und ihre Convergenzpunkte K und k mit

* Man wird die Figur nach dem Muster von Nro. 2 selbst zeichnen.

der Centralen OO′ entsprechen sich also wie Potenzlinie und Polare zwischen dem Kreis O und der Geraden MN. Die Potenzlinie der Schnittkreise O und O′ ist ihre gemeinschaftliche Sehne RS, welche die Centrale in L schneidet. Es ist noch die Polare rs des inneren Aehnlichkeitspunkts der Kreise O und O′ mit dem Punkt l zu zeichnen, dieß muß nach §. 97, 5 geschehen. Nimmt man nun auf mn das Stück $kH = KL$ und zieht $OG \parallel lH$, so ist kG der Halbmesser der gesuchten Berührungskreise, denn es ist

$$kl : kH = OB : BG \text{ oder } kl : KL = OB : BG.$$

Mit dem Halbmesser BG werden die Kreise I und I′ nach §. 86, 7 gezeichnet.

§. 113.

Wenn die Bestimmungsstücke der gegebenen Kreise durch Zahlenwerthe gegeben sind, so kann man anstatt zu konstruiren, wie dieß in den vorausgehenden Paragraphen geschehen ist, auch den Weg der Berechnung einschlagen und den Zahlenwerth des Halbmessers des Berührungskreises suchen. Wenn diese Berechnung geschehen ist, so reduzirt sich die Konstruktion auf ein Minimum. Dieses Verfahren empfiehlt sich namentlich für die Zeichnungen der gothischen Ornamentik, wo gewisse bestimmte Fälle sich immer wiederholen. Wir stellen daher die Aufgabe:

Es sind zwei Kreise, nämlich ihre Halbmesser r und r′, sowie ihre Centraldistanz d gegeben; man soll die Potenzlinie und die Polaren ihrer Aehnlichkeitspunkte, oder vielmehr man soll die Punkte K, k, f (identisch mit L, l, l) finden, in welchen jene Linien von der Centralrichtung der Kreise geschnitten werden. (Fig. 196.)

Nach §. 95, 3 verhält sich

$$A'K : BK = d + r - r' : d - r + r',$$

woraus $A'K + BK : BK = 2d : d - r + r'$,

oder da $A'K + BK = A'B = r + r' - d$ (Schnittkreise vorausgesetzt),

so ist $$1)\ BK = \frac{(r + r' - d)(d - r + r')}{2d}.$$

Zur Bestimmung des Punktes k der Polaren mn des äußeren Aehnlichkeitspunkts im Kreis O liefert der §. 96, 1 folgende Proportion:

$$Ak : Bk = A'K : BK = AA' : BB' = d + r - r' : d - r + r',$$

woraus

$$Ak + Bk : Bk = 2d : d - r + r',$$

oder weil $Ak + Bk = AB = 2r.$

$$2)\ Bk = \frac{r(d - r + r')}{d}.$$

Ebenso findet man den Punkt f, in welchem die Polare des inneren Aehnlichkeitspunkts im Kreis O die Centralrichtung schneidet aus §. 96, 2 durch die Proportion:

$$Af : Bf = AK : A'K = AB' : A'B = d + r + r' : r + r' - d,$$

woraus $Af - Bf : Bf = 2d : r + r' - d,$

oder da $Af - Bf = 2r,$

$$3)\ Bf = \frac{r(r + r' - d)}{d}.$$

§. 114.

Um die Anwendung der vorausgehenden Formeln zu erleichtern, mögen einige häufig vorkommende Fälle im Besonderen angeführt werden.

1) Die zwei gegebenen Kreise sind gleich, so daß $r = r'$. In diesem Falle liefern die drei Formeln des vorigen Paragraphen

$$BK = r - \frac{d}{2},\ Bk = r,\ Bf = \frac{r(2r - d)}{d}.$$

Die zwei ersten Gleichungen zeigen, daß die Potenzlinien die Centraldistanz OO' und die Weite A'B halbirt, sowie daß k mit dem Mittelpunkt des Kreises O coincidirt. Die Lage der Polaren des inneren Aehnlichkeitspunktes ist aber von dem Verhältniß d : r abhängig.

2) Wenn die zwei gegebenen Kreise gleich sind und überdieß $r = r' = d$, so daß die gegebenen Kreise einen einmodeligen Spitzbogen bilden, so nehmen die vorausgehenden Formeln ihre einfachste Gestalt an, es wird

$$BK = \frac{r}{2},\ Bk = r,\ Bf = r.$$

In diesem Fall geht also nach der letzten Formel die Polare des inneren Aehnlichkeitspunkts für den Kreis O durch den äußeren Punkt B' des Kreises O', oder f coincidirt mit B'.

3) Für die gewöhnlichsten Fälle gleicher Schnittkreise, wo $r = r'$, berechnet sich die Lage des Punktes f nach der dritten Gleichung von Nro. 1; man findet:

für $d = {}^3/_2\, r = {}^3/_2\, r'$; $Bk = {}^1/_3\, r = {}^1/_3\, r'$,
für $d = {}^4/_3\, r = {}^4/_3\, r'$; $Bk = {}^1/_2\, r = {}^1/_2\, r'$,
für $d = {}^5/_3\, r = {}^5/_3\, r'$; $Bk = {}^1/_5\, r = {}^1/_5\, r'$.

4) Wenn die zwei gegebenen Kreise ungleich sind, $r > r'$, so findet man aus den Formeln §. 113:

$$\text{für } r = 2r',\ d = 2r';\quad BK = \frac{r'}{4},\quad Bk = r',\quad Bk = r',$$

$$\text{für } r = 2r',\ d = {}^9/_4\, r';\ BK = {}^5/_{24}\, r',\ Bk = {}^{10}/_9\, r',\ Bk = {}^2/_3\, r'.$$

5) Wenn die zwei gegebenen Kreise zwar ungleich sind, sich aber von innen berühren, so ist $d = r - r'$. Nun zeigen die Formeln des §. 113, wenn man diesen Werth von d substituirt:

$$BK = 0,\ Bk = 0,\ Bk = \frac{2rr'}{r - r'},$$

Es fallen also die Punkte K und k mit dem Endpunkt B' des Kreises O' zusammen, in welchem sie sich berühren. Die Lage von k hängt von dem Verhältniß r : r' ab. Die letzte Formel gibt:

für $r = 2r'$, $Bk = 4r'$,
für $r = 3r'$, $Bk = 3r'$,
für $r = 4r'$, $Bk = {}^8/_3\, r'$,
für $r = 5r'$, $Bk = {}^5/_2\, r'$,
für $r = 6r'$, $Bk = {}^{12}/_5\, r'$.

6) Wenn von den zwei letzten Kreisen einer, nämlich O, unendlich groß, also durch eine Gerade MN vertreten und somit $r = \infty$, $d = \infty$ ist, so findet man

$$BK = 0,\ Bk = \frac{\infty}{\infty},\ Bk = \frac{\infty}{\infty}.$$

Es fällt also der Punkt K mit dem Punkt B zusammen, in welchem die Gerade MN von der Centralrichtung geschnitten wird; d. h. es fällt die Potenzlinie mit der gegebenen Geraden zusammen; die Lage der Polare bleibt unbestimmt, und muß also durch andere Betrachtungen bestimmt werden.

§. 115.

Folgende Beispiele, die sämmtlich der gothischen Ornamentik entnommen sind, mögen die Anwendung der vorausgehenden Berechnungen zeigen. Der Halbmesser des Berührungskreises ist stets mit ϱ bezeichnet.

1) In der früheren Aufgabe §. 103, 3 soll der Halbmesser ϱ des Kreises I und noch derjenige zweier anderen seitlichen Berührungskreise i und i′ gesucht werden. (Fig. 222.)

Die Kreise O und O′ berühren sich von innen und es ist $r = 2r'$, nach §. 114 coincidirt K mit B, und $Bk = 4r'$. In gleichem Verhältniß stehen die Kreise O und O″, es coincidirt also L mit A und $Al = 4r'$. Mithin ist $kl = 12r'$, $KL = 4r'$ und also nach §. 111

$$12r' : 4r' = 2r' : \varrho,\ \varrho = {}^2/_3\,r'.$$

Nimmt man also $OD' = {}^2/_3\,OO''$ und beschreibt aus O′ und aus O″ mit O′D′ Kreise, so convergiren sie im Mittelpunkt des gesuchten Kreises I. Weil ferner der Kreis i die Kreise O, O′ und I berührt, die sich auch selbst gegenseitig berühren, so liegen die Berührungspunkte C, F, G, B in einer Richtung, CF, FG, GB sind wie BC Viertelskreise, daraus folgt leicht $iF = {}^1/_3\,r'$.

2) In einem einmodeligen Spitzbogen ABC sind mit demselben Halbmesser AB zwei Gegenbogen DH und DF beschrieben, welche die Höhe CD berühren; man soll einen Kreis zeichnen, welcher die Seiten der Spitzbogen und die zwei Gegenbogen berühre. (Fig. 257.)

Die Kreise O und O′ werden gleichartig von I berührt, es ist $r = r' = d$, folglich coincidirt K mit D, und k mit A (§. 114, 2). Die Kreise O und O″ werden ungleichartig berührt und es ist $r = r'$, $d = {}^3/_2\,r'$, es coincidirt also L mit der Mitte E von DB und $Bl = {}^1/_3\,r'$ (§. 114, 2 u. 3). Mithin ist $KL = {}^1/_4\,r'$, $kl = {}^4/_3\,r'$ und nach §. 111

$${}^4/_3\,r' : {}^1/_4\,r' = r' : \varrho;\ \varrho = {}^3/_{16} . r' = {}^3/_{16} . 4BE = {}^3/_4 . BE.$$

Nimmt man also $BG = {}^3/_4\,BE$ und beschreibt aus A und B mit AG Kreisbogen, so convergiren sie im Mittelpunkt des gesuchten Kreises I.

3) Es ist ein einmodeliger Spitzbogen ABC gegeben, in welchem noch 4 Gegenbogen mit demselben Halbmesser AB so gezeichnet sind, daß sie sich paarweise in den Punkten E und F berühren, welche die Grundlinie AB in drei gleiche Theile theilen; man soll zwischen den Seiten des Spitzbogens und den inneren Gegenbogen, sowie zwischen den inneren und äußeren Gegenbogen berührende Kreise einzeichnen. (Fig. 258.)

Es ist $OO' = AB = r$, $O'O'' = \frac{1}{3} r$, $OO'' = \frac{4}{3} r$, $O'O''' = \frac{2}{3} r$, $OO''' = \frac{5}{3} r$, wie leicht zu sehen.

Die Kreise O und O′ werden vom Kreis I gleichartig berührt, da hier $r = r' = d$, so coincidirt K mit der Mitte D von AB und k mit A oder O (§. 114, 1 u. 2). Die Kreise O und O″ werden ungleichartig von I berührt, und da hier $r = r'$, $d = \frac{4}{3} r$ ist, so coincidirt L mit der Mitte E von BF und $Bl = \frac{1}{2} r$ (§. 114, 3). Mithin ist $kl = \frac{3}{2} r$, $KL = \frac{1}{6} r$, also nach §. 111

$$\frac{3}{2} r : \frac{1}{6} r = r : \varrho, \quad \varrho = \frac{1}{9} r = \frac{1}{9} . 6 BG = \frac{2}{3} BG.$$

Der Kreis i zwischen den inneren und äußeren Gegenbogen berührt die Kreise O und O″ gleichartig, für welche $r = r'$, $d = \frac{4}{3} r$. Es coincidirt also K′ mit der Mitte E von BF und k′ mit dem Punkt A (114, 1). Dieser Kreis i berührt aber auch die Kreise O und O‴ ungleichartig, für welche $r = r'$, $d = \frac{5}{3} r$. Es coincidirt also L′ mit G, der Mitte von EB, und es ist $Bl = \frac{1}{5} r$ (§. 114, 3). Mithin

$$k'l' = \frac{6}{5} r, \quad K'L' = \frac{1}{6} r, \text{ also}$$

$$\frac{6}{5} r : \frac{1}{6} r = r : \varrho', \quad \varrho' = \frac{5}{36} r = \frac{5}{36} . 6 BG = \frac{5}{6} BG.$$

4) Ueber den Halbweiten AD und BD eines einmodeligen Spitzbogens ABC sind Halbkreise beschrieben, man soll über denselben einen berührenden Kreis einzeichnen. (Fig. 259.)

Der Kreis I berührt die Kreise O und O′ gleichartig, für welche $r = r' = d$; K coincidirt also mit der Mitte D von AB und k mit A (§. 114, 1). Dieser Kreis I berührt aber auch die Berührungskreise O und O″, für welche $r = 4 r''$ ungleichartig; L coincidirt also mit B und $Bl = \frac{8}{3} r''$ (§. 114, 5). Mithin $kl = \frac{20}{3} r''$, $KL = 2 r''$ und

$$\frac{20}{3} r'' : 2 r'' = 4 r'' : \varrho, \quad \varrho = \frac{6}{5} r'' = \frac{6}{5} O''B.$$

Nimmt man $O''E = \frac{1}{5} O''D$ und beschreibt aus A und B mit AE Kreise, so schneiden sie sich im Mittelpunkt des gesuchten Kreises I.

5) Ein Spitzbogen ist so konstruirt, daß die Weite AB $= \frac{3}{4} OB$, auch sind mit dem Halbmesser $\frac{1}{2} OB$ zwei Gegenbögen eingezeichnet, welche sich in der Mitte D von AB berühren; man soll über denselben einen Berührungskreis einzeichnen. (Fig. 260.)

Der Kreis I berührt die Kreise O und O′ des Spitzbogens, für welche $r = r'$, gleichartig, K liegt also in der Mitte D von AB und k

coincidirt mit O (§. 114, 1). Dieser Kreis I berührt die Schnittkreise O und O″ ungleichartig, für welche $r = 2r''$, $d = {}^9/_4 r'$, folglich ist $BL = {}^5/_{24} r''$, $Bl = {}^2/_3 r''$ (§. 114, 4). Mithin

$KL = KB - BL = {}^3/_4 r'' - {}^5/_{24} r'' = {}^{13}/_{24} r''$, $kl = {}^8/_3 r''$; also

${}^8/_3 r'' : {}^{13}/_{24} r'' = 2r'' : \varrho$, $\varrho = {}^{13}/_{32} r''$,

oder wenn $BG = GF = {}^1/_4 r''$, $\varrho = {}^{13}/_{32} . 4BG = {}^{13}/_8 BG = 1^5/_8 BG$.

Nimmt man also $GH = {}^5/_8 GF$ und beschreibt aus O und O′ mit OH Kreise, so schneiden sie sich im Mittelpunkt des gesuchten Kreises F.

6) Ueber den Halbmessern OA und OB eines Halbkreises ABC sind selbst wieder Halbkreise gezeichnet, man soll über denselben einen berührenden Doppelkreis einzeichnen. (Fig. 261.)

Der Kreis I des Doppelkreises berührt den Halbkreis O und dessen Höhe OC, es coincidirt also nach §. 114, 6 K mit O und nach §. 112, 4 k mit A. Derselbe Kreis I berührt auch die Kreise O und O′ ungleichartig, für welche $r = 2r'$, es coincidirt also nach §. 114, 5 L mit B und $Bl = 4r'$, mithin

$kl = 8r'$, $KL = 2r'$, $8r' : 2r' = 2r' : \varrho$, $\varrho = \frac{1}{2} r'$.

Nimmt man also $BD = {}^1/_2 O'B$ und beschreibt aus O und O′ mit OD Kreise, so convergiren sie im Mittelpunkt des Berührungskreises I.

7) Ueber den Halbmessern AD und BD eines einmodeligen Spitzbogens ABC sind zwei Halbkreise beschrieben; man soll über denselben einen berührenden Doppelkreis einzeichnen. (Fig. 262.)

Der Kreis I des Doppelkreises berührt den Kreis O und die Höhe CD des Spitzbogens, es coincidirt also nach §. 112, 4 K mit D und k mit dem anderen Ende des Kreisdurchmessers O. Derselbe Kreis I berührt auch die Berührungskreise O und O″ ungleichartig, für welche $r = 4r''$ es coincidirt also nach §. 114, 5 L mit B und $Bl = {}^8/_3 r''$; mithin $kl = {}^{32}/_3 r''$, $KL = 2r''$ und

${}^{32}/_3 r'' : 2r'' = 4r'' : \varrho$, $\varrho = {}^3/_4 r''$.

Nimmt man also $EB = {}^3/_4 O''B$ und $O''F = {}^3/_4 O''B$ und beschreibt aus A mit AE und aus O″ mit DF Kreise, so schneiden sie sich im Mittelpunkt des Kreises I.

8) In den einmodeligen Stitzbogen ABC, in welchem mit dem gleichen Halbmesser AB zwei Gegenbogen beschrieben sind,

die sich in der Mitte D der Grundlinie berühren, soll ein berührender Doppelkreis eingezeichnet werden. (Fig. 263.)

Der Kreis I des Doppelkreises berührt die Höhe CD des Spitzbogens und den Kreis O, der Punkt K coincidirt also wie in Aufg. 6 mit D und k mit dem anderen Ende des Durchmessers des Kreises O, so daß $Ak = r'$. Derselbe Kreis I berührt die Schnittkreise O und O″ ungleichartig, für welche $r = r'$, $d = \frac{3}{2} r'$, es liegt also L in der Mitte E von BD und $Bl = \frac{1}{3} r'$ (§. 114, 3); mithin $kl = \frac{7}{3} r'$, $KL = \frac{1}{4} r'$ und

$$\frac{7}{3} r' : \frac{1}{4} r' = r' : \varrho; \quad \varrho = \frac{3}{28} r' = \frac{3}{7} EB.$$

Nimmt man also $BF = DG = \frac{3}{7} EB$ und beschreibt aus A mit AF und aus O″ mit O″G Kreise, so convergiren sie in dem Mittelpunkt des gesuchten Kreises I.

9) Ueber den Halbmesser AD und BD eines einmodeligen Spitzbogens ABC sind selbst wieder einmodelige Spitzbögen beschrieben, man soll über denselben einen Doppelkreis einzeichnen. (Fig. 264.)

Der Kreis I des Doppelkreises berührt den Kreis O und die Höhe CD des Spitzbogens ABC, der Punkt K coincidirt also mit der Mitte D von AB und $Ak = r = 2r'$ wie in der vorigen Aufgabe. Derselbe Kreis I berührt die Schnittkreise O und O″ ungleichartig, für welche $r = 2r'$, $d = 2r'$, daher $BL = \frac{1}{4} r'$, $Bl = r'$ (§. 114, 4); mithin $kl = 5r'$, $KL = \frac{3}{4} r'$ und

$$5r' : \frac{3}{4} r' = 2r' : \varrho, \quad \varrho = \frac{3}{10} r' = \frac{3}{5} BE, \text{ wenn } BE = \frac{1}{2} DB.$$

Nimmt man also $BF = GD = \frac{3}{5} BE$ und beschreibt aus A mit AF, und aus B mit BG Kreise, so convergiren sie im Mittelpunkt des Kreises I.

Anhang
über
die Symmetrie ebener Systeme.

In den ersten Büchern dieses Werkes wurde versucht eine Theorie der Symmetrie auf eine allgemeine geometrische Anschauung zu gründen. Da nun dieses Unternehmen neu und in der Form wie es hier ausgeführt wurde doch nicht in der Allgemeinheit gehalten worden ist und werden konnte, wie die Natur der Sache es an sich erheischt, so müssen noch einige Betrachtungen nachgetragen werden, welche im Stande sind die Bedeutung dieses Theiles der Geometrie aufzuhellen.

Das Wesen der Symmetrie besteht nach unserer Auffassung darin, daß zwei oder mehrere congruente ebene Systeme zu einem System höherer Ordnung vereinigt sind und zwar so, daß sie eine Gerade mit allen ihren Punkten und einen Vielstrahl mit allen seinen Richtungen gemein haben. Durch diese innige Vereinigung und Durchdringung der untergeordneten Systeme entsteht ein symmetrisches Ganzes, welches durch das Ebenmaß seiner Theile für den Beschauer jenen wohlthuenden Eindruck macht, der ihm sein Wohlgefallen zuzieht. Aus dieser Auffassung ergeben sich zwei Arten der Symmetrie, die centrische Symmetrie und die Axensymmetrie, als die nothwendigen aber auch einzigen Hauptformen des Symmetriebegriffes. Durch die Vereinigung einer größeren Anzahl von congruenten Systemen nach diesen Grundformen der Symmetrie wurden die höheren Systeme der Symmetrie entwickelt, welche in der Regelmäßigkeit ihren Gipfelpunkt erreichten, und in der Dekoration den Reichthum ihres Inhaltes offenbarten.

Diese Auffassung des Symmetriebegriffes ist nach der bisher gebräuchlichen Anschauung einerseits zu weit und andererseits zu eng; zu weit ist er, weil hiebei neben der Axensymmetrie auch die Centricität Anspruch auf den Namen der Symmetrie macht; zu eng ist er, weil die Axensymmetrie nur auf die Vereinigung congruenter Systeme ausgedehnt ist. Diese Abweichung von der hergebrachten Anschauungsweise macht eine eingehendere Besprechung dieses Gegenstandes nothwendig.

Was nun zuerst die Ausdehnung des Symmetriebegriffes auf die Centricität betrifft, so ist zu beachten, daß dieselbe jedenfalls mit der Axensymmetrie viel Gemeinsames hat, indem sie wie diese ein harmonisches Ganzes höherer Ordnung durch die Vereinigung congruenter Systeme hervorbringt. Zudem gibt es noch andere Beziehungen, wodurch ein gesetzmäßiges harmonisches Ganzes erzeugt wird, ohne dieses der Symmetrie eigenthümliche Mittel der Vereinigung congruenter Systeme zu gebrauchen und diesen harmonischen Formen gegenüber muß doch die Symmetrie in ihrer Eigenthümlichkeit unterschieden werden. Ich darf hier nur an die Curven erinnern, welchen eine gewisse analytische Formel zu Grunde liegt; einige derselben, wie die Linien zweiter Ordnung, Kreis, Ellipse rc. sind symmetrisch, andere sind es nicht, wie z. B. die Schneckenlinien. Die Klarheit der Anschauung erfordert also jedenfalls eine Unterscheidung im Sinne des obigen Symmetriebegriffes. Die Axensymmetrie hat die Eigenschaft, daß alle Paare zugeordneter Punkte auf Richtungen vertheilt sind die einem Parallelvielstrahl angehören, und daß alle Zuordnungsdistanzen durch die Symmetrieaxe halbirt werden; die centrische Symmetrie hat ebenso die Eigenschaft, daß alle Paare zugeordneter Punkte auf Richtungen liegen die einem ordinären Vielstrahl angehören und daß alle Zuordnungsdistanzen durch das Centrum des Vielstrahls halbirt werden. Die Halbirung der Zuordnungsdistanzen durch das dominirende Raumelement ist also beiden Arten auf gleiche Weise eigenthümlich, sowie auch ihre Vertheilung auf den Strahlen eines Vielstrahls. Ich sehe darum keinen Grund, warum diese durchgreifende und wesentliche Uebereinstimmung nicht Anspruch auf eine gemeinsame Benennung machen sollte, eine Benennung die zudem in dem unmittelbaren Wortlaut des Wortes Symmetrie ausgedrückt ist. Wenn sich aber hienach die Ausdehnung des Symmetriebegriffes auf die Centricität nicht nur rechtfertigt, sondern geradezu aufdringt, so muß ich schließlich noch daran erinnern, daß dieser Gebrauch des Symmetriebegriffes in dem Bereich der ebenen Vielecke durch die

naturgemäße Klassifizirung der symmetrischen Gestalten, wie die ersten Bücher dieses Werkes zeigen, als ein fruchtbarer und keineswegs müßiger Fund legitimirt ist. Ich kann noch hinzufügen, daß diese Berechtigung in noch viel höherem Grade an den Tag tritt, wenn man die gleichen Grundsätze auf die körperlichen Systeme anwendet. Ich habe gefunden, daß man auf diesem Wege die symmetrischen Gestalten der Polyeder ebenso entwickeln und klassifiziren kann, wie dieß hinsichtlich der Polygone in diesem Werke geschehen ist, und daß alsdann der ganze Umfang der Krystallgestalten in den Bereich der Geometrie hereingezogen wird und die Wissenschaft der Krystallographie eine äußerst einfache und anziehende Entwicklung gewinnt, welche manchem Streit der Krystallographen ein Ende macht.

Der andere Vorwurf, daß der in diesem Werke aufgestellte Symmetriebegriff zu eng sei, ist nicht unbegründet. Diese Beschränkung besteht darin, daß die Symmetrie blos auf die Vereinigung congruenter Systeme basirt ist. Es hatte diese Beschränkung die Folge, daß nur eine auf den parallelen Zuordnungsstrahlen senkrechte Axe ins Auge gefaßt wurde. Setzt man aber eine Axe voraus, welche auf den parallelen Zuordnungsstrahlen schief steht und zugleich die Zuordnungsdistanzen halbirt, so erhält man gleichwohl eine Gestalt, welche den Anforderungen des Symmetriebegriffes entspricht, sobald man nur die Bestimmung aufhebt, daß die symmetrische Gestalt durch die Axe in congruente Hälften getheilt werden müsse. Die zwei Hälften der Schiefarensymmetrie sind zwar nicht congruent, aber sie sind darum doch gestaltsverwandt; eine genauere Betrachtung des Falles zeigt vielmehr, daß dieselben denjenigen Grad der Verwandtschaft besitzen, welchen man mit dem Namen der Affinität zu bezeichnen pflegt. Die Schiefarensymmetrie ist also eine Vereinigung zweier affinen Systeme, die, wie die congruenten Systeme der Normalaxensymmetrie, eine Gerade mit allen ihren Punkten und einen Vielstrahl mit allen seinen Strahlen gemein haben. Wenn also auch die Uebereinstimmung der zwei vereinigten Systeme der Schiefaxensymmetrie keine so vollkommene ist wie bei der Normalaxensymmetrie, so ist sie nichts desto weniger doch auch vorhanden und kann nicht verfehlen einen ähnlichen Eindruck zu machen wie jene. Es ist also kein Grund vorhanden, die Symmetrie auf die senkrechte Axe zu beschränken. Demnach ist das Trapez Fig. 13 für die schiefe Axe GH symmetrisch, weil seine Ecken A und B, C und D auf parallelen Richtungen liegen und weil die Zuordnungs-

Distanzen AB und CD durch die schiefe Axe GH halbirt werden. Ueberdieß haben die Richtungen AC und BD wie bei der Normalaxensymmetrie die Eigenschaft in den Punkten F und E der Symmetrieaxe GH zu convergiren, es sind also auch jede zwei Richtungen, welche zwei einander zugeordnete Punkte mit einem Punkt der Axe verbinden, einander zugeordnet. Man wird bemerken, daß gerade auf dieser Eigenschaft der Schiefaxensymmetrie, welche in §. 9 bewiesen wurde, die Anwendung des Lineals in der centrischen Symmetrie beruht. Freilich muß man von diesem allgemeinen Standpunkt aus den Gebrauch verwerfen, nach welchem das Trapez Fig. 4 im Gegensatz zu demjenigen Fig. 13 symmetrisch genannt wird, denn hienach sind geradezu alle Trapeze symmetrisch, indem die einen der Normalaxensymmetrie und die anderen der Schiefaxensymmetrie angehören. Uebrigens zeigt doch der allgemeine Gebrauch des Attributs symmetrisch für das Trapez Fig. 4, daß der gewöhnliche Symmetriebegriff nur die Normalaxensymmetrie kennt. Dieser beschränkte Gebrauch des Symmetriebegriffes kann aber natürlich nicht verbieten diesen Begriff in der Allgemeinheit zu fassen, wie es die Natur der Sache verlangt.

Man kann selbst noch weiter gehen und den Symmetriebegriff auch auf krummlinige Axen ausdehnen, wenn man die parallelen Zuordnungsdistanzen durch irgend eine Curve hälftet, so daß man neben der Normalaxensymmetrie und der Schiefaxensymmetrie noch eine Krummaxensymmetrie bekommt. Man trifft wirklich auch in der Ornamentik so wie in den Blattbildungen der Natur Gestalten, welche auf eine solche Ausdehnung der Axensymmetrie schließen lassen; allein eine krumme Axe kann jedenfalls nur zwischen Curven vorkommen, so daß die Punkte zweier Curven gegen eine krumme Axe symmetrisch liegen, d. h. auf parallelen Zuordnungsdistanzen vertheilt sind, welche durch die krumme Axe halbirt werden. Da wir uns aber auf geradlinige Gestalten beschränken, so können wir die Frage von der Krummaxensymmetrie füglich bei Seite lassen.

Nun wäre noch zu erwägen, ob auch die centrische Symmetrie ihre besonderen Arten hat. Dieß ist jedoch entschieden nicht der Fall; denn wenn auch eine Zuordnungsdistanz durch eine senkrechte und durch eine schiefe Richtung also auf zwei Arten halbirt werden kann, so kann sie doch durch einen Punkt nur auf eine Art, nämlich eben nur durch ihren Mittelpunkt halbirt werden. Es kann also nur eine Art der centrischen Symmetrie geben.

Nachdem in dem Gesagten dem seither gebräuchlichen Symmetrie-

begriff Rechnung getragen wurde, so wird es zur völligen Aufklärung des Gegenstandes nothwendig sein, den Zusammenhang zwischen der Theorie der Symmetrie und der Geometrie zu beleuchten, und zwar namentlich ihr Verhältniß zu derjenigen Gestalt dieser Wissenschaft, welche sie durch die Entdeckungen der sogenannten neueren Geometrie angenommen hat.* Die neuere Geometrie ist kein neues Fach, das zu der Geometrie der Alten als ein weiterer Theil hinzugekommen wäre, sondern es verhält sich gerade umgekehrt, die neuere Geometrie schließt die Geometrie der Alten als einen besonderen Theil in sich ein. Früher beschränkte man sich auf die Beziehungen, welche unter den Namen der Congruenz und der Aehnlichkeit bekannt sind. Neuere Forschungen haben gezeigt, daß diese Beziehungen nicht ausreichen, um die Welt der Gestalten zu erforschen, und daß man sich zu noch allgemeineren Beziehungen erheben muß. Die allgemeinste Beziehung zweier Gestalten, welche sich aufgedrungen hat, ist die Collineation. Zwei Gestalten stehen im Verhältniß der Collineation, wenn ihre Raumelemente, — Punkte und Richtungen — sich so entsprechen, daß jede gerade Punktreihe der einen Gestalt wieder einer geraden Punktreihe der anderen Gestalt, und jeder Vielstrahl der einen Gestalt wieder einem Vielstrahl der anderen Gestalt entspricht. Damit zwei Gestalten diese Bedingungen erfüllen können, müssen sie eine gewisse Uebereinstimmung der Form haben, welche Conformität heißt, und welche darin besteht, daß die Doppelverhältnisse zweier sich entsprechender gerader Punktreihen gleich sind. Die mit dem Namen der Collineation bezeichnete Verwandtschaft der Figuren hat wieder ihre besonderen Formen; es gibt deren drei: Affinität, Aehnlichkeit und Congruenz. Im Falle der Affinität sind auf jedem Paar homologer Punktreihen schon die einfachen Verhältnisse homologer Abschnitte einander gleich, im Falle der Aehnlichkeit sind sie auf allen Paaren homologer Punktreihen einander gleich, und im Falle der Congruenz sind diese Verhältnisse gleich Eins, d. h. alle homologen Distanzen sind einander gleich. Es ist also die Affinität ein besonderer Fall der Collineation, die Aehnlichkeit ein besonderer Fall der Affinität, die Congruenz ein besonderer Fall der Aehnlichkeit. Auf diesen Beziehungen beruht die Vergleichung der Raumgestalten; auch bilden sie die Grundlage

* Bei dieser Gelegenheit erlaube ich mir auf ein Werk aufmerksam zu machen, das ich vor Jahren herausgegeben habe: „Grundlinien der neueren ebenen Geometrie von Chr. Paulus, Stuttgart, Verlag von W. Paulus, 1853.

für ihre eigene Entwicklung. Diese wird dadurch erzeugt, daß zwei oder mehrere verwandte Gestalten so mit einander vereinigt werden, daß sie mit einem oder mehreren Paaren homologer Raumelemente sich decken, während sie mit den übrigen homologen Elementen aus einander liegen. Nun können zwei collineäre Systeme ein, zwei, drei und selbst viele homologe Raumelemente mit einander gemeinschaftlich haben, ohne in völlige Coincidenz überzugehen. Die größte Verschmelzung zweier collineärer Systeme geschieht aber dadurch, daß sie zugleich eine gerade Punktreihe und einen Vielstrahl mit einander gemein haben, nämlich so, daß auf zwei sich deckenden homologen Richtungen zugleich auch alle homologen Punkte coincidiren, sowie in zwei sich deckenden homologen Punkten alle in ihnen convergirenden homologen Richtungen. Diese Lage zweier collineärer Systeme heißt perspektivisch; die Figuren 180 und 181 geben ein Beispiel hievon. In solchen Systemen fallen übrigens außer der Axe, welche die coincidirenden Punkte enthält, und dem Centrum, welches die coincidirenden Richtungen versammelt, alle anderen Raumelemente aus einander und bilden zwei Figuren wie ABCDEF und A′B′C′D′E′F′, welche immerhin noch eine gesonderte Selbstständigkeit bewahren. Es ist jedoch noch ein besonderer Fall der perspektivischen Lage möglich, welcher eine noch vollständigere Durchdringung und Verschmelzung der vereinigten Systeme zur Folge hat und der deßwegen mit dem Namen der Involution ausgezeichnet wird. Bei der involutorischen Vereinigung zweier collineärer Systeme tritt nämlich der merkwürdige Fall ein, daß der ganze Umfang der einen Gestalt mit dem ganzen Umfang der anderen Gestalt coincidirt, ohne daß in den Punkten des Umfangs homologe Punktpaare der Systeme vereinigt wären; sondern zwei nicht homologe Punkte, welche an einem Ort des Umfangs coincidiren, sind zwei solchen Punkten homolog, die an einem anderen Ort des Umfangs wieder coincidiren. Zwei solche sich entsprechende Orte, die zwei Paare homologer Punktpaare einschließen, ohne daß die an einem Ort coincidirenden Punkte homolog wären, heißen einander zugeordnet, und die Gerade welche sie verbindet und zwei homologe Richtungen der Systeme einschließt, heißt Zuordnungsdistanz. Der ganze Umfang einer involutorischen Gestalt besteht also aus Paaren solcher einander zugeordneter Punkte, so daß jeder Punkt des Umfangs einem anderen Punkt des Umfangs zugeordnet ist. Damit nun aber zwei Gestalten die Fähigkeit haben, so mit einander vereinigt zu werden, daß sie einen Umfang mit einander theilen können, müssen sie begreiflicher Weise eine gewisse

Uebereinstimmung der Form besitzen, welche diese Verschmelzung gestattet. Wie die Gestalt einer Figur hiezu geeignet sein kann, während eine andere es nicht ist, das kann am besten der Kreis zeigen. Zwei Kreise mit gleichem Halbmesser sind nicht nur congruente Curven, sondern sie besitzen überdieß noch die Fähigkeit in unzählig vielen Lagen coincidiren zu können. Heißt man nun in einer dieser Lagen die Punkte der zwei coincidirenden Kreise homolog welche in Coincidenz stehen, und dreht hierauf den einen Kreis um einen beliebigen Durchmesser als Axe, bis er nach einer halben Umdrehung wieder mit dem anderen Kreis coincidirt, so hat man den Fall der Involution, wo sich die homologen Punkte beider Kreise nicht mehr decken, während die Kreise als Ganze immer noch coincidiren. Zwei gleich große Kreise haben also die Eigenschaft in unendlich vielen Lagen involutorisch vereinigt werden zu können. Diese Eigenschaft kommt nun in der Regel zweien weniger verwandten Formen nicht zu und häufig gibt es nur eine involutorische Lage für ihre Vereinigung; allein soviel sieht man doch, daß eine der Involution fähige Gestalt keine dem Zufall oder dem Belieben überlassene Form haben darf, sondern sie besteht aus zwei wenn oft auch ungleichen Hälften, die in vollkommener Abhängigkeit von einander stehen, so daß die Lage eines Punktes der einen Hälfte durch den zugeordneten Punkt der anderen Hälfte vollkommen bestimmt ist. Eine Involutionsgestalt unterscheidet sich also von einer der Willkühr überlassenen Gestalt dadurch, daß sie das Gesetz der Selbstbestimmung in sich aufgenommen hat. Hiedurch trägt sie nicht mehr den Charakter der Zufälligkeit, sondern vielmehr denjenigen der Nothwendigkeit in sich, und in dieser Eigenschaft der Selbstbestimmung ihres Wesens ist sie fähig ein Symbol des Geistes zu sein, der wesentlich durch das Gesetz der Selbstbestimmung besteht. Wenn daher ein geistiges Wesen, wie der Mensch, eine solche Gestalt anschaut, so erkennt es in ihr diese Verwandtschaft mit seinem eigenen Wesen und wird auf eine angenehme Weise von ihr berührt; es findet Wohlgefallen an derselben. Diese Selbstbestimmung der Involutionsgestalt ist das Wesen der Symmetrie in ihrer weitesten Fassung, und so kann man von diesem allgemeinen Standpunkt aus sagen, daß jede Involutionsgestalt symmetrisch sei. Weil hienach die Involution vorzüglich geeignet ist das Wesen der Symmetrie aufzuschließen, so ist es nöthig, noch ein wenig bei derselben zu verweilen.

Die ordinärsten geometrischen Kenntnisse reichen aus, eine Involutionsgestalt zu konstruiren. Man wähle zu dem Ende irgend eine

Gerade L als Involutionsaxe und außerhalb derselben einen Punkt O als Involutionscentrum. Nun ziehe man durch das Involutionscentrum einen Involutionsstrahl a, welcher die Involutionsaxe in einem Punkt A schneidet. Nimmt man hierauf auf dem Involutionsstrahl a zwei Punkte C und C', welche die Distanz OA harmonisch theilen, so sind sie zwei einander zugeordnete Punkte des Involutionssystems, welches zu der Axe L und zum Centrum O gehört; auch wird alsdann die Zuordnungsdistanz von der Axe L und vom Centrum O harmonisch getheilt. Konstruirt man sodann gleichermaßen noch weitere involutorisch zugeordnete Punktpaare und verbindet dieselben nach einander durch Gerade, so bilden sie ein involutorisches Vieleck, oder, wenn die involutorischen Punktpaare stetig auf einander folgen, eine involutorische Curve. Gestalten, welche auf diese Weise konstruirt sind, tragen den Charakter der Symmetrie im weitesten Sinne des Wortes an sich. Der Kreis, jede Curve zweiter Ordnung, aber auch jedes Viereck ist bei dieser allgemeinen Anschauung symmetrisch.

Solcher Involutionsgestalten gibt es aber zwei Arten, die sich wesentlich von einander unterscheiden. Zwei Punkte C und C', welche eine Distanz OA harmonisch theilen, umgeben nämlich entweder das eine Ende A oder das andere Ende O derselben. Wählt man daher die Zuordnungspunkte C und C', D und D' 2c. so, daß sie die auf der Axe liegenden Endpunkte der Involutionsstrahlen umgeben, so setzen sie eine Gestalt zusammen, welche die Involutionsaxe einschließt und durch sie in zwei gleiche oder ungleiche Hälften getheilt wird. Eine solche Gestalt ist axensymmetrisch, weil alle ihre Zuordnungsdistanzen von der Axe in bestimmten Verhältnissen getheilt werden. Wählt man aber die Zuordnungspaare C und C', D und D' 2c. so, daß sie das Involutionscentrum O einschließen, so entsteht eine Involutionsgestalt, welche das Involutionscentrum umgibt und deren Zuordnungsdistanzen alle durch O gehen und in diesem Punkt nach bestimmten Verhältnissen getheilt werden. Eine solche Gestalt gehört der centrischen Symmetrie an. Die Axensymmetrie und die Centricität sind also die zwei wesentlichen Formen der Symmetrie.

Die Symmetrie solcher Involutionsgestalten ist vielleicht wohl für den gewandten Blick des Geometers, nicht aber für das ungeübte Auge des gewöhnlichen Beschauers bemerklich, das höchstens eine dunkle Ahnung von den symmetrischen Beziehungen der Gestalt haben wird. Soll die Symmetrie einer Involutionsgestalt augenfällig werden, so muß die involutorische Zuordnung ihrer Punkte auf ihre einfachste Form gebracht

werden, was nicht möglich ist, so lange Centrum und Axe zugleich im endlichen Raum liegen. Die harmonische Theilung einer Distanz gewinnt nämlich ihren einfachsten Ausdruck, wenn einer der Theilpunkte in die unendliche Entfernung hinausrückt, denn alsdann halbirt der andere Zuordnungspunkt diese Distanz. Die Involution nimmt also ihre einfachste Form an wenn entweder das Involutionscentrum oder die Involutionsaxe in den unendlichen Raum hinausrückt. Befindet sich das Involutionscentrum in unendlicher Entfernung, so werden die Involutionsstrahlen parallel und die Involutionsdistanzen werden durch die Involutionsaxe halbirt; es gestaltet sich also die Axensymmetrie, und zwar je nachdem die Axe schief oder senkrecht auf den Involutionsstrahlen ist, zur Schiefaxensymmetrie oder zur Normalaxensymmetrie. Zugleich verwandelt sich das Collineationsverhältniß der vereinigten Systeme in Affinität, im Fall der schiefen Axe, und es verwandelt sich in Congruenz, im Fall der senkrechten Axe. Liegt dagegen die Involutionsaxe in unendlicher Entfernung, so halbirt das Involutionscentrum alle Zuordnungsdistanzen und wird zu einem wirklichen Mittelpunkt. Auch hier gestaltet sich die Collineationsverwandtschaft der vereinigten Systeme zur Congruenz. So sind also die Schiefaxensymmetrie, die Normalaxensymmetrie und die Centricität in der That die drei spezifischen Formen der eigentlichen Symmetrie. Von diesen drei Formen der Symmetrie sind es aber namentlich nur die zwei letzteren welche selbst wieder die Fähigkeit besitzen auf's Neue mit einander zur Bildung höher entwickelter Gestalten der Symmetrie vereinigt zu werden, und die Mannigfaltigkeit der symmetrischen Gestalten aus sich zu entwickeln. Eben aus diesem Grunde sind diese einfachsten Formen in diesem Werke bevorzugt und als die Hauptnormen der Symmetrie behandelt worden.

Die hier dargelegte Auffassung der Symmetrie zeigt, daß die Symmetrielehre kein für sich bestehendes unabhängiges Fach, sondern ein Theil, und zwar ein sehr wesentlicher Theil der Geometrie ist. Was würde in der That aus dieser Wissenschaft werden, wenn man ihr alle symmetrischen und regelmäßigen Gestalten entzöge? Sie würde ihre wesentlichsten Begriffe verlieren, gerade diejenigen, auf welche sie ihren Fortschritt gründet; selbst der rechte Winkel würde als Bestandtheil des regelmäßigen Zweistrahls verloren gehen, sie würde auf ein Minimum von Kenntnissen zurücksinken und die Anwendung auf's Leben, um derentwillen sie so hoch geschätzt wird, einbüßen. Prof. v. Staudt hat zwar das Kunststück geliefert, mit Vermeidung jedes Maßbegriffes, also auch des

Begriffes der Gleichheit, eine reine Geometrie der Lage zu schreiben. Das Mittel, welches ihm bei dieser Beschränkung noch übrig blieb, war die harmonische Theilung. Weil nämlich die Diagonalen des vollständigen Vierseits sich gegenseitig harmonisch theilen, so konnte er die harmonische Theilung, auch ohne die Verhältnisse zu berücksichtigen unter welcher dieselbe geschieht, als eine bloße Thatsache festhalten und symbolartig benützen, indem er die Theilung der Diagonalen des vollständigen Vierseits harmonisch nannte. Einzig und allein versehen mit dieser Thatsache und Alles auf sie basirend, unternahm er es die Welt der Gestalten zu erforschen. Es ist ihm auch wirklich gelungen, alle sonstigen Hilfsmittel verschmähend, die allgemeinen Beziehungen der Gestalten, namentlich aber die Linien und Flächen zweiter Ordnung nach ihren allgemeinen Eigenschaften auf eine überraschende Weise zu entdecken. Dieser Erfolg ist ihm geworden, weil er in der harmonischen Theilung das Wesen der Involution, also gerade die Grundlage der symmetrischen Gestaltung herausgefunden hat, welche er sodann nur noch zum Begriff des Polarsystems erweitern durfte, um für seine Absicht völlig ausgerüstet zu sein. Wenn es ihm aber bei dieser absichtlichen Beschränkung nicht möglich war auf die Centricität und Normalaxensymmetrie überzugehen und den Weg zu den eigentlich symmetrischen Gestalten zu betreten, so hat er doch den Beweis geliefert, daß die Involution diejenige Beziehung ist, welche die Welt der Gestalten beherrscht, wenigstens die der geradlinigen, ebenflächigen und diejenigen der zweiten Ordnung, welche jedenfalls die bedeutendsten und verbreitetsten sind. So wichtig es aber ist, daß die Wissenschaft der Geometrie zu den allgemeinsten Beziehungen sich erhebe, weil ohne dieselben der Zusammenhang und das eigentliche Licht der Erkenntniß fehlt, so wichtig ist es auch andererseits, daß der Uebergang zu den besonderen Formen, zu dem Einzelnen, erkannt werde, weil eben hierin das eigentliche Resultat der Wissenschaft zum Vorschein kommt, nämlich die Formen, welche im Reich der Natur, im Bereich der Kunst, überhaupt also im Leben getroffen werden. Dieser Uebergang zu den besonderen Formen wird durch die Symmetrielehre hergestellt, daher kann man mit Recht sagen, daß sie der Gipfel des Gebäudes sei, welches die Geometrie aufzuführen hat. Wenn nun allerdings die Methode des Prof. v. Staudt nie allgemein werden wird, und vielmehr der seither übliche Weg, als dem pädagogischen Bedürfniß angemessen, beibehalten werden muß, wenigstens innerhalb des Schulunterrichts, so folgt daraus noch nicht, daß die Symmetrielehre nicht auch in

ihrem Zusammenhang behandelt werden muß. Man durchblättere ein Lehrbuch der Geometrie, so wird man finden, daß der Fortschritt im Ganzen darin besteht, daß man allmählig zu immer höheren Gebilden aufsteigt, die symmetrischen Gestalten, zu welchen sie fähig sind, aufsucht, und ihre Eigenthümlichkeiten erforscht, um mit den gewonnenen Resultaten wieder einen neuen Lauf zu beginnen, bis das ganze Reich des Raumes durchwandert ist. Wenn sonach das Eingehen auf die Symmetrie der verschiedenen Raumformen ein wesentlicher Bestandtheil des methodischen Fortschrittes ist, so ist es doch auch nöthig, diesen Lebensfaden des Fortschrittes an und für sich in selbstständiger Form ins Auge zu fassen, damit dieser wichtige Bestandtheil der Wissenschaft in seinem inneren Zusammenhang erkannt werden möge. Die Vollendung und Abrundung der Geometrie verlangt es also, daß die Lehre der Symmetrie irgend einmal als selbstständiges Fach behandelt werde; wenn man auch davon absehen wollte, daß das geometrische Zeichnen die Symmetrielehre gar nicht entbehren kann.

Zum Schluß möchte ich noch auf die Frage antworten, ob die Lehre der Symmetrie, so wie sie in den ersten Büchern dieses Werkes vorgetragen ist, wenn auch nur ihren Grundzügen nach, erschöpfend behandelt sei. Ohne hiemit anderweitigen Forschungen und Urtheilen vorgreifen zu wollen, sehe ich mich doch veranlaßt, hier schon meine verneinende Antwort abzugeben. Die praktischen Ziele, welche bei dieser Arbeit neben der wissenschaftlichen Aufgabe verfolgt wurden, geboten der Rücksicht auf Kürze und Einfachheit eine entscheidende Stimme einzuräumen, welche die Beschränkung auf's Allernothwendigste zur Folge hatte. Es ist nämlich ein Hauptheil der Symmetrielehre ganz übergangen worden, welcher in jedes der symmetrischen Systeme eine neue Gliederung und Abtheilung gebracht haben würde. Die Systeme, welche unterschieden wurden, sind: das Einaxensystem, das centrische System, das Zweiaxensystem, und die regelmäßigen Systeme, die nach der Zahl der Axen abgetheilt werden. Greift man nun irgend eines dieser Systeme heraus und überschlägt im Gedanken die Gestalten, welche es einschließt, so wird man innerhalb dieses Systems eine unendliche Menge von Gestalten gewahr, welche außer dem Symmetriegesetz des Systems selbst lediglich der Zufälligkeit preisgegeben sind, so daß zwischen den Gestalten des Systems selbst kein innerer Zusammenhang stattfindet. Will man mehrere einfache Gestalten eines Systems mit einander verbinden und eine Combination derselben her-

stellen, welche ein gefälliges Ganze bilden kann, so ist eine Wahl zwischen unendlich vielen Möglichkeiten zu treffen, ohne daß das allgemeine Symmetriegesetz irgend ein Motiv an die Hand gibt, während es doch augenscheinlich ist, daß nicht je zwei beliebige Gestalten sich geschmeidig in einander fügen, sondern durch eine mißlungene Wahl eine Geschmacklosigkeit verrathen werden. Da nun aber innerhalb des Symmetriegesetzes kein bestimmender Grund gefunden wird, so ist man genöthigt, zu einer allgemeinen Eigenschaft der Gestalten zurückzugreifen. Es ist zwar nicht der Ort hier, in einem Anhang einen Gegenstand von so allgemeiner Natur abzuhandeln, allein ich will doch versuchen, durch einige Andeutungen die angeregte Sache so weit zu bezeichnen, daß Jeder der Lust hat, in den Stand gesetzt ist diesen Theil der Symmetrielehre auszufüllen. Auch dieser Theil der Symmetrielehre lehnt sich an die Anschauung der neueren Geometrie an. Ein ebenes System ist nämlich nach derselben für die allgemeinste Beziehung der Gestalten, für die Collineation, vollkommen bestimmt, sobald vier Richtungen desselben gegeben sind, die nicht in einem Punkt convergiren; oder also durch ein Vierseit. Durch jedes Vierseit ist aber ein ganzes ebenes System mit allen seinen Punkten und Richtungen vollkommen bestimmt, und es gibt eben so viele verschiedene ebene Systeme als es Vierseite gibt. Das vollständige Vierseit hat nämlich nur vier Seiten, aber es hat sechs Ecken, von welchen jedes Eck durch die Seiten des Vierecks nur mit vier anderen Ecken verbunden ist. Es sind also noch drei nicht verbundene Eckenpaare vorhanden. Die drei Verbindungslinien dieser Ecken, die sogenannten Diagonalen des Vierseits, sind nun bereits drei abgeleitete Richtungen des Systems. Diese drei Diagonalen convergiren ihrerseits wieder in drei Punkten, welche zu den sechs Ecken des urspüglichen Vierseits noch drei weitere Punkte des Systems hinzufügen. Jeder dieser neu gewonnenen Punkte des Systems ist durch die Diagonalen nur mit vier Ecken des ursprünglichen Vierseits verbunden, und er bestimmt also mit den übrigen zwei Ecken noch zwei neue Richtungen, so daß die drei neuen Ecken im Ganzen sechs neue Richtungen liefern. Man sieht wie auf diese Weise, wenn man fortfährt, alle neu entstehenden Punkte und Richtungen mit den vorher schon vorhandenen Punkten und Richtungen in Verbindung zu bringen, eine immer größere Zahl von Punkten und Richtungen auftauchen, welche alle durch das ursprüngliche Vierseit gegeben sind. Alle diese Punkte und Richtungen setzen das System des ursprünglichen Vierseits zusammen und stehen in

einer um so näheren Verwandtschaft zu einander, je näher sie sich in der Reihe der Ableitungselemente stehen. Auf diese Weise gehört zu jedem Vierseit eine Reihe von Ableitungsgestalten, welche in einem besonderen Verwandtschaftsverhältniß stehen und Gestaltenreihe heißen. Wendet man nun dieses allgemeine Ableitungsgesetz auf die einfachen Gestalten eines der symmetrischen Systeme an, so bekommt man innerhalb jeden Systems für jede einfache Gestalt eine Gestaltenreihe, welche obigem Bedürfniß, die Verwandtschaft der Gestalten innerhalb des Systems bestimmen zu können, entgegenkommt, und gestattet, bei der Vereinigung mehrerer Gestalten diejenige Wahl zu treffen, welche ein geschmackvolles Ganze bilden kann.

Es mag noch die Bemerkung gestattet sein, daß die Partition der symmetrischen Gestalten, welche der Dekoration zu Grunde liegt, bereits eine Anwendung dieses weiteren Princips der Gestaltung ist, denn es läßt sich nachweisen, daß in symmetrischen Gestalten die Punkte, welche dem Ableitungsgesetz genügen, die Gerade auf der sie liegen, in einem rationalen Verhältniß theilen.

Druck der J. B. Metzler'schen Buchdruckerei in Stuttgart.

[illegible] III–IV
[illegible] III
[illegible] III
[illegible] III

[illegible]

[illegible] III. IV. –

I

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] 1873/14